横浜国立大学教育人間科学部附属横浜中学校個人研究論文集 第 10 号

中学校数学科における
数学的な思考力・表現力及び自律的活動力の
育成を目指したレポート作成の実践

藤原　大樹

目　次

横浜国立大学教育人間科学部附属横浜中学校
平成 27（2015）年３月

１．研究の意図と目的

現行の学習指導要領では，自ら学ぶ意欲，基礎的・基本的な知識・技能に加え，思考力・判断力・表現力等を育成することが重視されている。

とりわけ算数・数学科においては，大規模調査で見られた「数学的な見方や考え方を生かして問題を解決すること」「自らの考えを数学的に表現すること」などの課題を受け，「小・中・高等学校を通じて，発達の段階に応じ，算数的活動・数学的活動を一層充実させ」ることを通して「数学的な思考力・表現力」を育成するが目指されている（中央教育審議会，2008)。

近年では，社会の急激な変化において，自立した個人が他者と協働して新たな価値を創造していく社会をつくっていくことが求められている。そしてこれからの学校教育で身に付けさせていくべき資質･能力として，国立教育政策研究所（2013）では，教科を横断する汎用的な視点に立ち，学力の三要素を「課題を解決するため」の資質・能力という視点で再構成し，「21 世紀型能力」（図１）を提案した。この「21 世紀型能力」は，「思考力」を中核として，これを支える「基礎力」，その使い方を方向付ける「実践力」という三層構造で構成されている。中学校数学科の授業で求められてきた数学的な思考力・表現力は，「基礎力」を踏まえた「思考力」であるのみならず，「実践力」に発展するものとして捉えていくべきであると考えられる。生徒一人ひとりに汎用的な能力を身に付けていくことを考えたとき，「実践力」の３領域のうちの１つである「自律的活動力」を身に付けさせていくことが求められる。

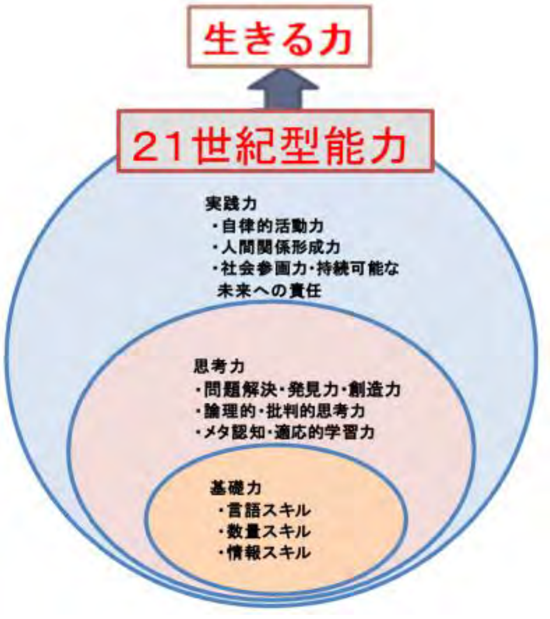


図１　21 世紀型能力

では，我々中学校数学科の教師は現行学習指導要領で求められている学習指導をどのように改善していけばよいのであろうか。数学的な思考力・表現力及び自律的活動力を生徒に身に付けさせるには，教師が手取り足取り導くような指導では育成できないことは容易に想像できる。教師の手をある程度離れ,主体的･自律的に活動を進めていく指導でしか育成できないであろう。この視点に立ったとき，数学科において数学的な思考力・表現力及び自律的活動力を身に付けさせる方策として，課題を数学的に探究し，その過程や結果をレポートに記述する実践が有効なのではないかと考える。なぜなら，レ

ポートの記述は，生徒の関心や問いをもとに思考したことを表現することができる活動であり，主体的・自律的な学びが期待できるからである。その価値を改めて見つめ，どの学校，どの教師でも実践できるような提案をしていく必要があると考える。

レポート作成の実践は，中央教育審議会（2008）における「言語活動の充実」の基本方針を受け，文部科学省（2008a）の数学的活動の指導に当たっての配慮事項として「(３）数学的活動の過程を振り返り，レポートにまとめ発表することなどを通して，その成果を共有する機会を設けること」(p.56）が例示されている。そもそも，レポート作成の実践はそれほど新しいものではなく，これまでも多くの数学科教師が実践してきた。しかし，生徒の数学的な思考力･表現力を伸ばすための有効な指導の方法として定着しているのか，疑問である。また，レポートを書ける子は書けるが，書けない子は書けないという“ある限られた生徒への指導法”のように教師から捉えられてはいないだろうか。さらには，学習評価をどうすればよいか，教師にとって不安感及び負担感があるのではないか。

例えば，明治図書「教育科学数学教育 2010 年 12 月号（No.638)『生徒の作品でみる数学レポート実践の成功実践』」では意欲的な実践が多数掲載されている。しかしその多くは，紙面の都合によるとも考えられるが，レポート作成に至るまでの指導，実施上の留意点，評価方法などといった，読者が実践する上での肝心な点について述べられていない。

そこで，本研究では目的を次のように設定する。

［研究の目的］

中学校数学科で数学的な思考力・表現力及び自律的活動力を育成することに向けて，レポート作成による指導と評価の留意点を明らかにすること。

上記の目的を達成するために，次の方法で研究を進めていくこととする。

［研究の方法］

① 中学校数学科において身に付けさせる資質・能力を，レポート作成の実践との関連で検討する。
② 上記①で検討した力を身に付けさせる指導と評価の方法としての学習活動を，レポートにまとめる実践を中心に検討する。
③ 上記②の学習活動を実施するための留意点についての仮説を立てる。
④ 上記③の留意点を踏まえた中学校数学科における事例を作成して実施し，検証する。

２．育成を目指す力のとらえ方

（１）数学的な思考力・表現力

中学校数学科における思考力・判断力・表現力等は，「数学的な思考力・表現力」（中央教育審議会，2008）である。観点別評価の観点「数学的な見方や考え方」の趣旨を基に「事象を数学的に捉えて論理的に考察し表現したり，その過程を振り返って考えを深めたりする力」の総体として捉えられる（横浜国立大学教育人間科学部附属横浜中学校，2012）。

[数学的な思考力・表現力]
事象を数学的に捉えて論理的に考察し表現したり，その過程を振り返って考えを深めたりする力

この数学的な思考力・表現力は，数学的活動を一層充実させること，及び言語活動を充実させることにより育成が求められている（中央教育審議会，2008；文部科学省，2008b）。一層の充実に向けて，数学的活動の本来あるべき姿について検討していく必要がある。これについては後述する。

（２）自律的活動力

「21 世紀型能力」は「自律的活動力」,「人間関係形成力」,「社会参画力・持続可能な未来への責任」の３つの領域から構成される。そのうちの「主として自己自身に関わる能力や価値」である「自律的活動力」は,「自分の行動を調整する」力と「自分の生き方を考え，キャリアを設計する力」から構成される。教科の枠にとらわれない広い視点に立った力として捉えることができるが，中学校数学科の学習は，特に前者の「自分の行動を調整する」力に関して,「自己を理解し行動を調整し意思決定」できるようになることに貢献するものと筆者は考える（国立教育政策研究所，2013)。

中学校数学科の授業では，当然ながら数学科の目標の達成に向けて生徒の数学的な思考力・表現力を育成していくことが求められている。このことを前提としながらも，これからは数学科としての資質・能力，すなわち思考力・表現力として閉じるのではなく，汎用的な視点から自律的活動力へ発展させていくことが，一教科として求められている。つまりそれは，数学科の学習の中で，自分の中にある予想や仮説を自覚し，目標を定めて計画を立て，やってみて検証し，表現して，振り返る，そしてまた新たに予想や仮説を立てる…という一連の探究的な学習が必要であることを示唆しているとも捉えられる。つまり，前述した「自己を理解し行動を調整し意思決定」することに他ならない。

では，次章ではそのための学習活動について検討していく。

３．育成の方策としての学習活動

（１）探究的な学習に向けた数学的活動

学習指導要領の数学科の目標は以下のとおりである（文部科学省，2008a）。

> 数学的活動を通して，数量や図形などに関する基礎的な概念や原理・法則についての理解を深め，数学的な表現や処理の仕方を習得し，事象を数理的に考察し表現する能力を高めるとともに，数学的活動の楽しさや数学のよさを実感し，それらを活用して考えたり判断したりしようとする態度を育てる。

つまり，数学科で身に付けさせたい力を，数学的活動を通して育てることがねらいとされている。学習指導要領では，数学的活動は「生徒が目的意識をもって主体的に取り組む数学にかかわりのある様々な営み」であり，「基本的に問題解決の形で行われる」。具体的には「疑問や問いの発生，その定式化による問題設定，問題の理解，解決の計画，実行，検討及び新たな疑問や問い，推測などの発生と問題の定式化と続く」とあり，本来的には再帰的な過程として捉えられていることがわかる。なお，数学科における再帰的な学習の過程としては，例えば数学的モデリング過程（図２　池田・山崎（1993)），統

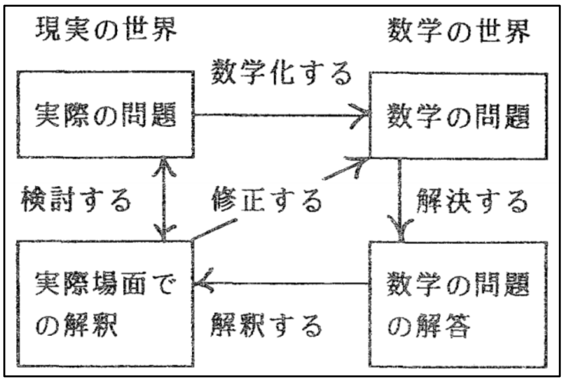


図２　数学的モデリングの過程
（池田・山崎，1993）

図３　統計的問題解決過程 PPDAC
（Wild, C. J. & Pfannkuch, M.（1999）

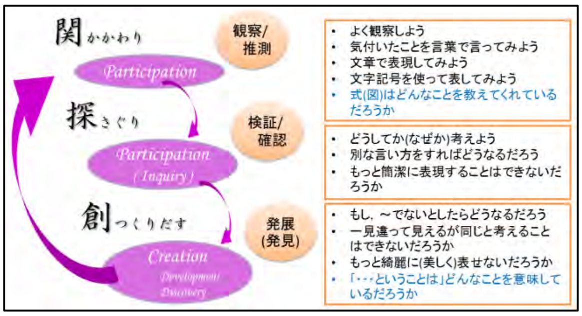


図４　P-ICD Learning Process Model
（根本，2014）

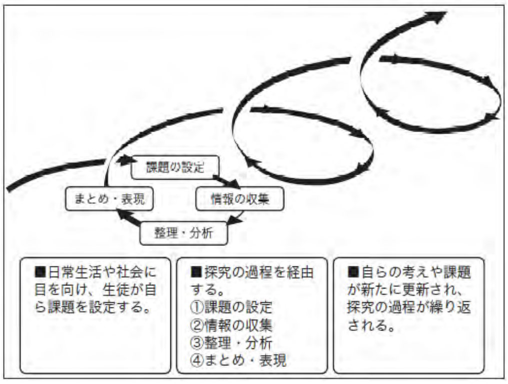


図５　探究的な学習の過程
（文部科学省，2008c）

計的問題解決の過程（図３　Wild，C.J. & Pfannkuch，M.（1999），P-ICD Learning Process Model（図４　根本，2014）がある。これらをさらに広く発展させたものが，教科を横断する総合的な学習の時間における探究的な学習過程（図５　文部科学省，2008c）のモデルであると捉えられる。つまり，数学科の学習においても，本質を探り究めるという探究的な学習を実現することが重要ということである。なお，図５の探究的な学習の過程について「いつも①～④が順序よく繰り返されるわけではなく，順番が前後することもあるし，一つの活動の中に複数のプロセスが一体化して同時に行われる場合もある」（文部科学省，2008c）とあるように，図２～５の過程は共通して，生徒の活動のおよその流れのイメージである。

この数学的な探究の過程を記述し，自身で納得したり他者を説得したりするために記述するものとしてレポートがある。本研究では，レポートを「探究的な数学的活動の過程を記述したもの」と捉える。なお，どのくらいの思考をしたか，どのくらいの文字数・枚数を記述したか等といった思考や表現の量はここでは考えない。また，個人で記述するものを研究の対象とする。

（２）数学的活動の指導

前述したとおり，数学的活動は再帰的な活動として想定されており，生徒が自分で，目的や意図を考えながら遂行すること自体に意味があると考えられる。ここでは，数学的活動の遂行について，「自立」及び「自律」の視点で検討していく。ここで，「自立」とは自分の力で遂行すること，「自律」とは自己を理解し行動を調整し意思決定することこと，として捉える。

① 自立的な数学的活動に向けて

文部科学省（2008b）には次のように述べられている。

> 教育及び学習指導が，願いや目的を実現するための意図的，計画的な営みであることに配慮すれば，教師のかかわりは必要であり，生徒の自立への誘いである。したがって，教師のかかわりは，時に積極的であり，次第にあるいは状況に応じて個別的，間接的になり，最終的には生徒自身が自力でする営みの機会を設けることが必要である。

つまり，生徒の「自力でする営み」に向けて，教師のかかわり方を変えていくことが必要であるということである。このことを永田（2012）は子供が自転車をこぐ練習を例に挙げ，「徐々に手を離すという感覚」と表現している。

これらのことから，教師が積極的にかかわる中で確実に数学的な知識・技能及び思考・表現について指導した上で，生徒の一連の探究的に思考し表現するレポート作成の実践は，中長期的な学習過程の後半の方に位置付けることが妥当であると考えられる。この学習過程において，「教師が生徒に活用させる授業」から「生徒が自ら活用する授業」に漸次的に移行させていくとい

うことで，生徒が自分の問いをもって何か行動したくなったとき，習得した知識・技能などを活用して考え表現することが多くの生徒に可能となるようにすることが大切であるということである。

② 自律的な数学的活動に向けて

数学的活動が本来的に再帰的な過程であることを前述した。では，教師がある程度「手を離した」中で，どのようにすれば生徒が目的意識をもって数学的活動に取り組むことができ，その成果としてレポートを作成することができるのであろうか。教師がかかわりをなくし，生徒が数学の問題の解決の過程で，生徒が“路頭に迷う”状態ではレポートを作成することなど不可能であろう。生徒が自己を理解し行動を調整し意思決定していくポイントは，問いを発し続けることができるかどうか，つまり学習意欲を喚起し持続し続けることができるかどうかにかかっていると考える。

この点で，生徒が学習の見通しを立てたり，学習したことを振り返ったりする活動（文部科学省初等中等教育局教育課程課（2014)，横浜国立大学教育人間科学部附属横浜中学校（2015a）では「「見通す・振り返る」学習活動」と表現している）が重要であると考えられる。この「見通す・振り返る」学習活動について，現行学習指導要領では「学習意欲の向上に資する」と述べられているが，横浜国立大学教育人間科学部附属横浜中学校（2014，2015a）では学習意欲及び思考力・判断力・表現力等の育成に資することが生徒の姿から明らかとなった。

特に，見通す対象，振り返る対象に着目してみることにより，

- 結果の見通しと過程の見通し，結果の振り返りと過程の振り返りは，一連の学習の過程において互いに補い合う関係にある。
- 結果の見通しと結果の振り返り，過程の見通しと過程の振り返りは，一連の学習過程において互いに促進し合う関係にある。

ということがわかった（図６）。

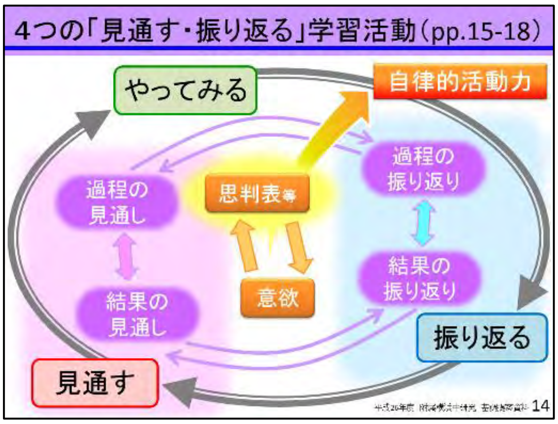


図６　学習活動のサイクルと「見通す・振り返る」学習活動（横浜国立大学教育人間科学部附属横浜中学校，2015b）

また，筆者らの数学科では，一連の数学的活動に「見通す・振り返る」学習活動を位置付けることで（図７），

・結果の見通しを促すことで，主として，数学的な思考・表現の動機付けが図られ，生徒の学習意欲を高めることができる。
・過程の見通しを促すことで，主として，数学的な思考・表現を具体的に計画，実行することができる。
・結果の振り返りを促すことで，わかったこととわからないこととの境界を理解することができ，更なる発展的な思考・表現への動機付けが図られる。
・過程の振り返りを促すことで，自身の成長や数学のよさをじっかんできるとともに，数学を活用するための思考・表現についての方法知を意識化することで強化することができる。

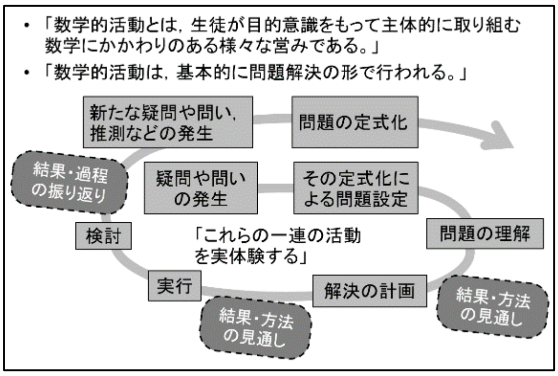


図７　数学的活動のサイクルと「見通す・振り返る」学習活動（横浜国立大学教育人間科学部附属横浜中学校，2015b（文部科学省(2008b)を模式図化して一部加筆））

ということがわかってきた（横浜国立大学教育人間科学部附属横浜中学校，2015a)。

つまり，生徒が自律的に数学的活動に取り組むためには，数学的活動に結果の見通し，過程の見通し，結果の振り返り，過程の振り返りを必然性が伴うように位置付けて促すことが有効な手立てになり得るということである。生徒が自らに数学的な問いを発し続けていれば，生徒の思考・表現の動機付けとなり,探究的な学習のサイクルは回し続けることができると考えられる。もし，思考・表現するための知識・技能が不十分であったとしても，自らの問いを解決するために必要であるとなれば，生徒の関心が知識・技能の復習へ向かうことにもつながり，学習活動としての価値は一層高まる。レポート作成においても，何度も繰り返し説明して記述していくことで，はじめは自信がなかったことも,「こうやってやればいいんだな」といった方法知や「これはこういうことなんだな」といった内容知を自分なりに獲得して活動を進めていくことができると考えられる。

なお，数学的活動を探究的に進めるにあたり，社会的構成主義的な視点から，個人的な「見通す・振り返る」学習活動だけでなく，自分で立てた見通しを他者と意見交換したり,集団としての振り返りを話し合ったりするなど，共同的な「見通す・振り返る」学習活動も有効である（佐藤，2014)。

４．レポート実践における留意点

レポートを作成させる実践は，そのねらいから，学習意欲を高めるもの（例えば「調べレポート」），知識を整理するもの（例えば「単元まとめレポート」），思考力等を高めるもの（例えば「発展レポート」）など様々である（例えば，藤原，2009；藤原，2010）。本研究では数学的な思考力・表現力を高めることをねらいとして，数学的に考えた活動の成果をレポートに記述する実践を対象として，実施上の留意点を，扱う問題・教材，実施の方法・時期，学習評価，成果の共有，の４つの観点から検討する。

（１）扱う問題・教材

［留意点Ⅰ］　数学的な思考･表現の動機付けやよさの実感が得られるように，数学的な発展性や現実性を含む問題・教材を扱う。

ここでは第１学年「Ａ数と式」領域の教材「正方形のマス目」（藤原，2012a）を例に，その扱いについて説明する。

事例：１年「Ａ数と式」領域　「正方形のマス目」

次の問題を取り上げ，第１学年のオリエンテーション（２回目）の授業と，「文字を用いた式」単元の末の授業を行った。その意図は，数学の学習を進めていく中で生徒の成長を実感させることにある。

問題　正方形のマス目に左上から自然数を順に入れていき，縦の列も横の列も重ならないように５つの数を選びます。これら５つの和が真ん中の数の５倍になる理由を説明しなさい。

3	4	5	6	7
8	9	10	11	12
13	14	15	16	17
18	19	20	21	22
23	24	25	26	27

○単元「正負の数」における指導

入学後２回目の授業で，中学校数学科における説明することの重要性を，活動を通して理解させることをねらいとして実践した。まず，マス目の左上に入れる最初の数を１にして，和が全員 65 になることを確認した後，左上にいろいろな自然数を入れて和を求めさせ，和が真ん中の数の５倍になりそうなことを帰納的に見付けていった。ここで，前述の原題を提示し，B5 白紙に理由の説明を書かせた。翌日の授業で，数名の生徒に説明させて理解を深め，プリントを回収した。例えば，図８のような記述が見られた。

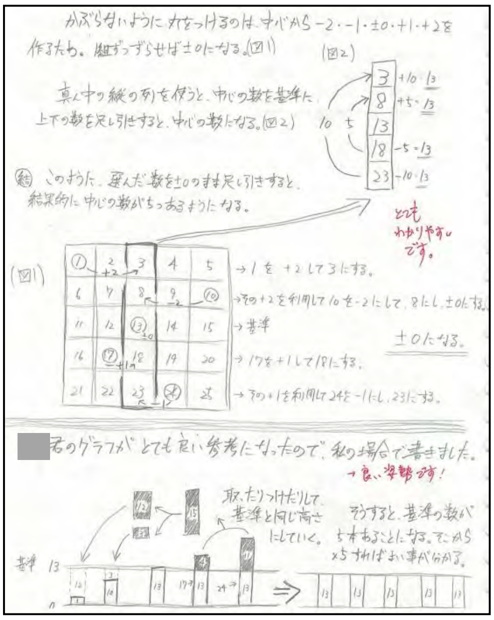


図８　入学時の生徒の記述

〇単元「正負の数」におけるテストとその解説

定期テストで，次の問 11 を出題した。

問 11　数学の授業で，5×5 の正方形のマス目に連続する自然数を 25 個順番に入れ，縦と横の列が同じにならないように数を 5 つ選んで合計しました。すると，

【きまり】選んだ数の和は，真ん中の数の 5 倍である

が成り立つことがわかりました。（例えば右図で，選んだ灰色の 5 つの数の合計は 75 であり，真ん中の 15 の 5 倍になっています。）

はじめさんは，もとの条件を少し変えて，発展的に考えてみることにしました。もとの条件を次の(1)～(3)のように変えたとき，それぞれ【きまり】は変わるでしょうか。変わらない場合には「変わらない」と，変わる場合には新しい【きまり】を，解答らんに書きなさい。

(1) 正方形のマス目の条件を，「5×5」から「7×7」に変える。（正答例：「選んだ数の和は，真ん中の数の 7 倍になる」）

(2) 正方形のマス目の条件を，「5×5」から「4×4」に変える。（正答例：「選んだ数の和は，2 列目の右端の数と 3 列目の左端の数の平均の 4 倍になる」）

(3) マス目に入れる数の条件を，「自然数」から「整数」に変える。（正答：「変わらない」）

評価規準は「もとの条件で成り立つきまりが，条件を変えたときに成り立つかどうか，また成り立たないならば新たにどのようなきまりが成り立つのかについて，考えることができる」である。テスト返却後の解説で，右図の Excel シート（図９）をプロジェクターで提示し，各条件のときに正答のきまりが成り立つことを，最初の数をいろいろと変えて帰納的に確認した。

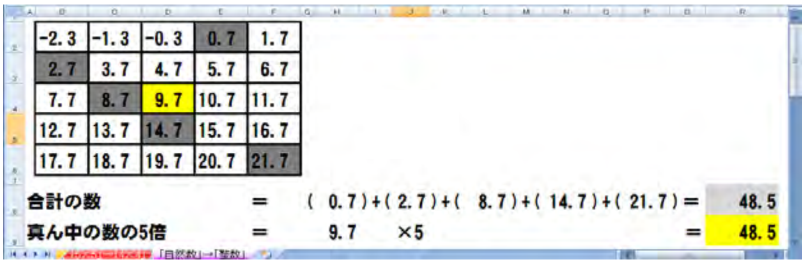


図９　Excel のシート

その後，他の変え方を問うと，生徒は「小数にする」，「0.5 ずつ増やして数を並べる」，「数の並びを渦巻き状にする」，「立体にする」などと発言していた。

〇単元「文字と式」における指導

単元「文字と式」の最後に原題を改めて取り上げ，きまりが成り立つ理由を文字を用いて中 1 なりに演繹的に説明する活動を設けた。文字のよさを実感させることがねらいであるが，説明の形式にはあまりこだわらず，第 2 学年の「文字式の説明」の素地として扱った。次の 3 種類の文字を使った表し方のうち，左と中央の 2 つが生徒の代表的なものである。右の表し方は，どの 5 つの数を選んでもその和が式 5a+(1+2+3+4+5)+(5+10+15+20)で表されるため，厳密な証明となる。この考え方に 1 名の生徒が気付き，発表できた。

a	a+1	a+2	a+3	a+4
a+5	a+6	a+7	a+8	a+9
a+10	a+11	a+12	a+13	a+14
a+15	a+16	a+17	a+18	a+19
a+20	a+21	a+22	a+23	a+24

a−12	a−11	a−10	a−9	a−8
a−7	a−6	a−5	a−4	a−3
a−2	a−1	a	a+1	a+2
a+3	a+4	a+5	a+6	a+7
a+8	a+9	a+10	a+11	a+12

a+1	a+2	a+3	a+4	a+5
a+1+5	a+2+5	a+3+5	a+4+5	a+5+5
a+1+10	a+2+10	a+3+10	a+4+10	a+5+10
a+1+15	a+2+15	a+3+15	a+4+15	a+5+15
a+1+20	a+2+20	a+3+20	a+4+20	a+5+20

図 10　説明に生徒が用いた文字の置き方（例）

その後，生徒の声から「4×4」や「立方体」に条件を変えていった。

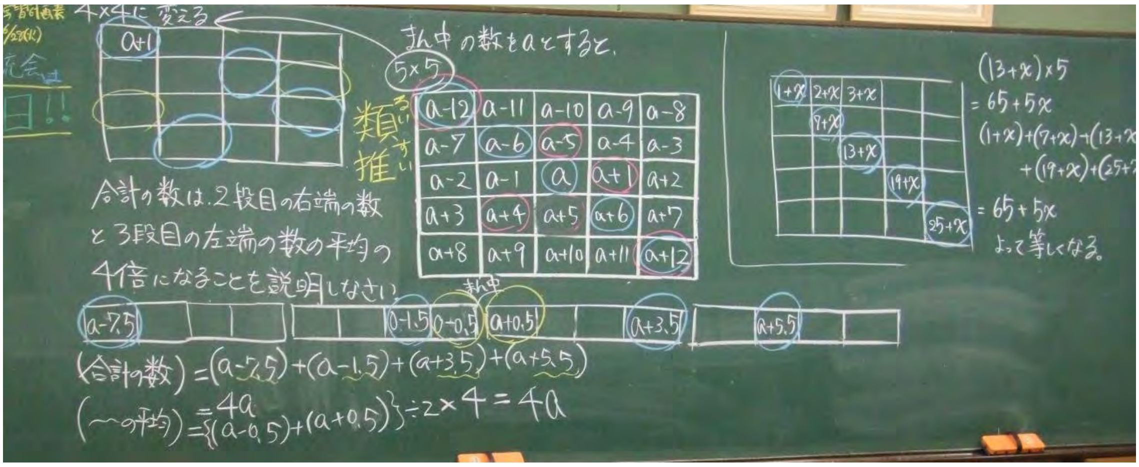


図 11　「文字を用いた式」単元の５×５の正方形のマス目の授業の板書

さらに，「5×5×5 の立方体にするとどうなるのですか」と問いを発する生徒もおり，この発言をもとに授業を１時間設けた（図 12）。

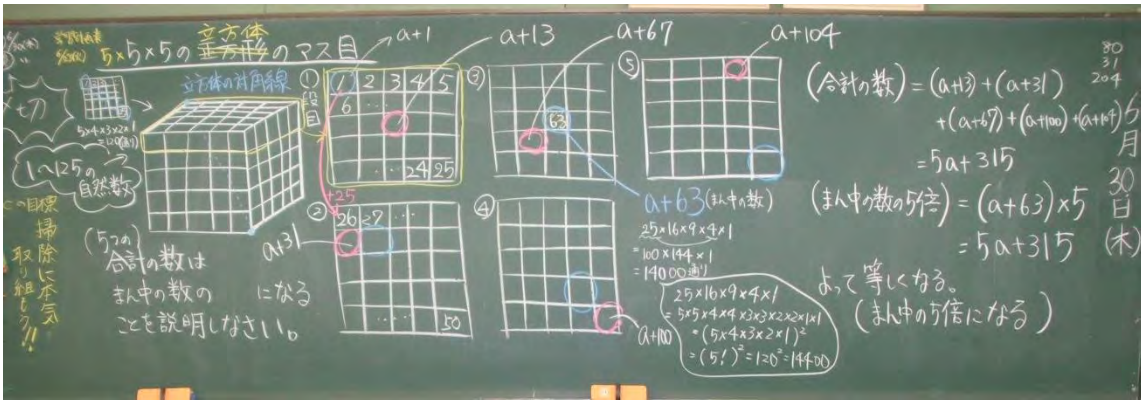


図 12　５×５×５の立方体のマス目の授業の板書

この授業では，きまりを予想するために，単純化して立方体の対角線上の数を選んだり，５面の正方形に分けてから，文字の置き方を平面の場合から類推したりする反応が多数見られた。余談だが，数の選び方は５！^{3}通りと表され，実に美しい。生徒が文字を用いて考えることを楽しみ，満喫できたことが本実践の一番の収穫であった。

このように，数，図形，次元などの条件を変えて発展的に考えるおもしろさ（問題の数学的な発展性）を含む問題・教材を扱うことで，生徒が数学的に考えたい，表現したいという意欲の高揚につながり，数学的な思考・表現のよさを実感できると考えられる。問題の現実性については，(２)で述べる。

（２）実施の方法

［留意点Ⅱ］　発展的に考えた成果をレポートに記述できるように，基になる授業で思考した過程や結果を可視化あるいは言語化して記録することを，数学的活動を通して予め指導しておく。

ここでは，第１学年「Ａ数と式」領域における「５円玉から満月は見えるか」（島田，1990；藤原，2012b）を例に，実施に当たっての指導について説明する。併せて，問題の現実性を含む問題・教材の扱いについても触れる。

事例：１年「Ａ数と式」領域　「５円玉から満月は見えるか」

授業日の直後が中秋の名月であることを話題にあげ，ポケットから５円玉を取り出し，穴から満月が見えるかどうかを問いかけて問題を提示した。

その後，生徒とのやりとりの中で教師から条件を設定していき，どうすれば解決できるか，グループで考えさせた。生徒たちからは場面を二等辺三角形で表して，その等辺と底辺の長さから頂角を求めればよいという方針が出されたが，知っている数学で解決できないため，別の方法を考えることになった。いくつかのグループから，おうぎ形で近似してその中心角を求めればよいという方針が出され，次の第２時で考えていくことになった（図 13）。

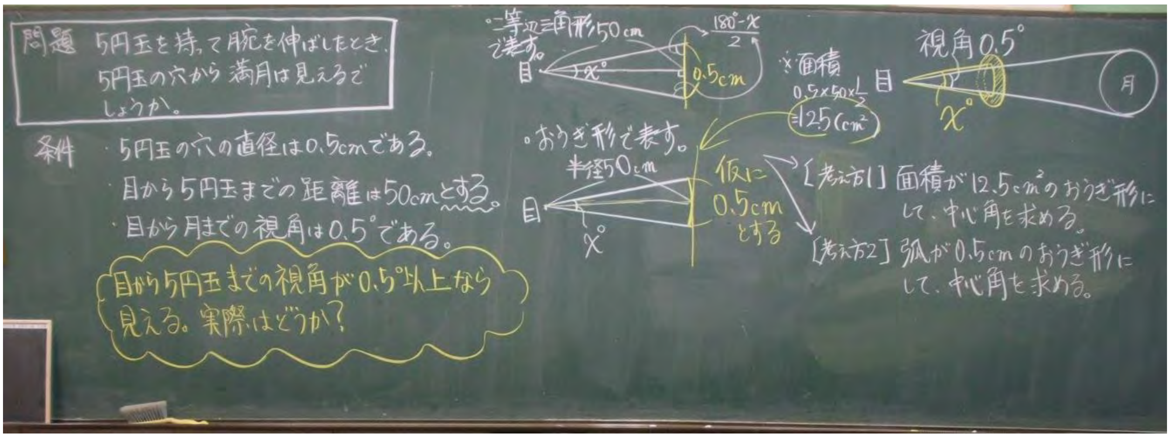


図 13　第１時の板書

第２時では，グループで考えた後，代表生徒に全体で発表させた。(図 14)

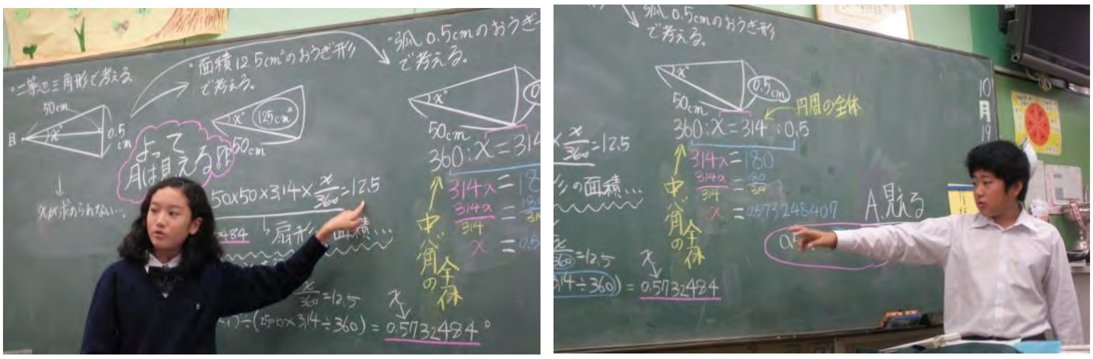


図 14　代表生徒による発表と全体共有

その後，なぜおうぎ形で近似してもよいのか，と問うと，ある生徒が円の求積方法を例に挙げ，中心角が微小なのでおうぎ形に近似してもその中心角は元の二等辺三角形の頂角と大きく変わらない，と説明して全体で認められた。

図 15　第２時の板書

その結果，Tw 生は第１－２時の活動をノートに図 16 のようにまとめた。この記述からは，自分が考えた過程や結果，他者が考えた過程や結果をきちんと可視化されて整理しており，振り返りの対象に十分なり得る形で保存されていることがわかる。第１学年の生徒が不慣れである理想化・単純化の考えについても，右下の「なぜ理想化してもよいのか？！」のところに図とともに明記してある。こういったことは日頃の指導の成果と解釈できる。

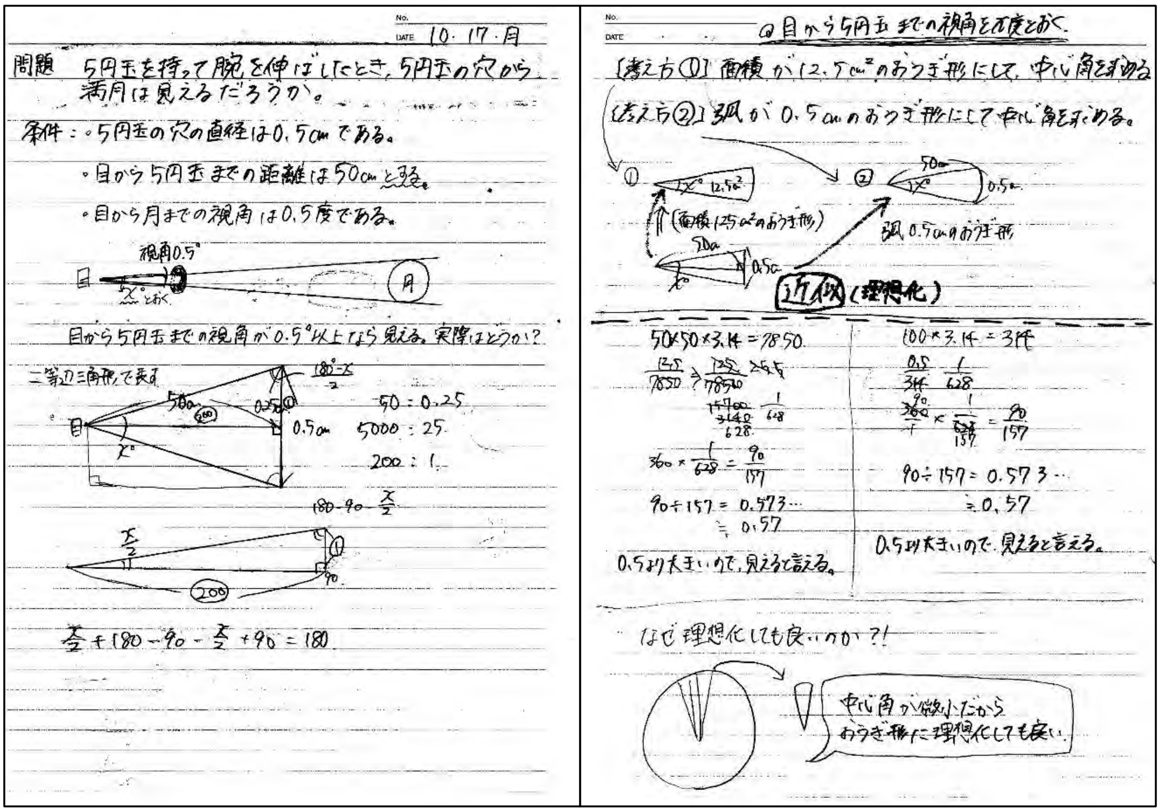


図 16　第１－２時における Tw 生のノート

また，実際に穴から満月が見えるかどうかの検証は，第２時を終えた後に自宅で確かめるように伝えた。すると，ほぼ全員の生徒が５円玉を片手に中秋の名月を覗いたようである。後日，50 円玉でも確かめた生徒もいた。

第３時では，次はどんなことを考えたいかについてアンケートした。すると，「50 円玉だとどうなるか」，「腕の長さが変わったらどうなるか」，「満月が穴ぴったりに見えるのは５円玉を目から何 cm 離したときか」などが問いとしてあげられた。そこで，条件を変えて考えてレポートを作成させることにした。その際，「どのような条件・仮定をおいたのか」「なぜこのような条件・仮定をおいてもよいのか」を記述させた。例えば Tw 生は，５円玉を 50 円玉に換え，目から 50 円玉までの距離は 50cm から 55cm に変えて，図 16 のノートの記述を元に考え記述している（図 17）。なお，満月が穴ぴったりに見える距離について，定期テストで出題した。

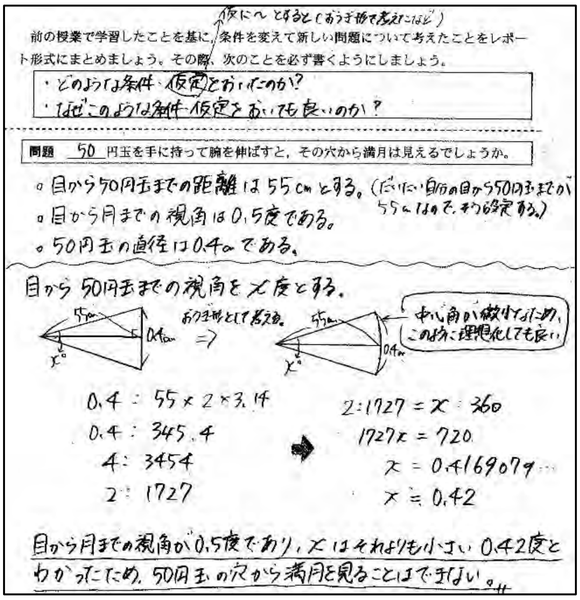


図 17　Tw 生のレポート

本事例の対象生徒は，現実的な問題を理想化・単純化して数学的に考えることに不慣れな数学的モデリングの初学者であるため，特に近似の考えの指導場面として捉えて，言語活動に力点を置いて授業を行った（藤原，2012b）。このように，授業において，数学的活動及び言語活動を通して指導しておくことで，生徒は条件を一部変えた問題を自力で解決し，考えた過程や結果をレポートに記述することができる。数学に苦手意識をもつ生徒も，参考にできる資料が手元にあれば，自力で活動に取り組むための手立てになると考えられる。しかもそれが自分が関わった前の授業で，自分が考えて理解し記述したものであれば，過程の振り返りを促すと考えられる。

また，問題・教材について，本教材は生徒の通常の生活の中で５円玉から満月を覗く場面はほぼないため，現実性が薄いように一見思える。しかし，硬貨という身近な物を使って「満月が見えるか，見えないか」という問いは，生徒の経験に基づいた予想と数学的な検証，現実的な検証を可能にするため，生徒の知的好奇心を喚起させることができた。本教材は，生徒の必要感という意味での現実性は薄いものの，生徒の身近な経験や事物との関連という意味での現実性は濃く，生徒の解決意欲を高めながら数学的モデリングを引き出すことができる。条件を一部変えたレポートの課題に適するものと考える。

［留意点Ⅲ］　その後の活動を目的的で有意味なものとして進められるように，解決に向けて「どう計画したのか」「なぜその計画にしようと思ったのか」といった着想や動機を記述させる。

ここでは，第２学年「Ｂ図形」領域の教材「鳩目返し」（藤原，2013a；藤原，2015a）を例に，実施に当たっての記述内容について説明する。

事例：２年「Ｂ図形」領域　　「鳩目返し」

教材「鳩目返し」は，もとの四角形を切って４つの四角形に分け，切った外側の４ヶ所を鳩目と紐で綴じて裏返すとどのような図形になるのかを考える教材である。もとの図形や切り方を変えるとできる図形が変わり，数学的な探究に適している。裏返さずして同じ原理で作業することもできる(図 18)。例えば四角形の対辺の中点同士を線分で結んで切り，鳩目返しを行うと，平行四辺形ができる。その証明には，第一に四角形になること，その上で第二に平行四辺形になることを含める必要がある。

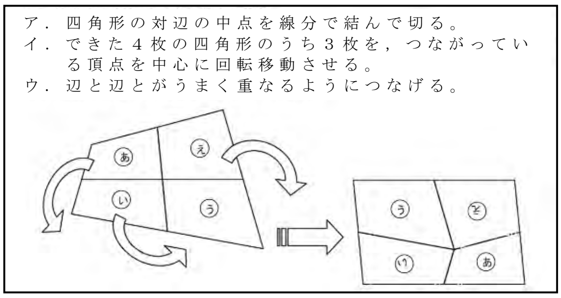


図 18　鳩目返しの操作手順

第１時では，正方形が既知の四角形にならない切り方と正方形が一般四角形になる切り方を見せた後，

対辺の中点を線分で結んで切って鳩目返しを行うと，○○形は△△形になる。

という命題について，台形は何の図形になるかと問うた。すると，長方形，平行四辺形，ひし形，たこ形，何にならないなどと予想した（図 19）。その後，生徒に方眼付きの画用紙を配り，これを実際に切って平行四辺形になることを確かめさせた。

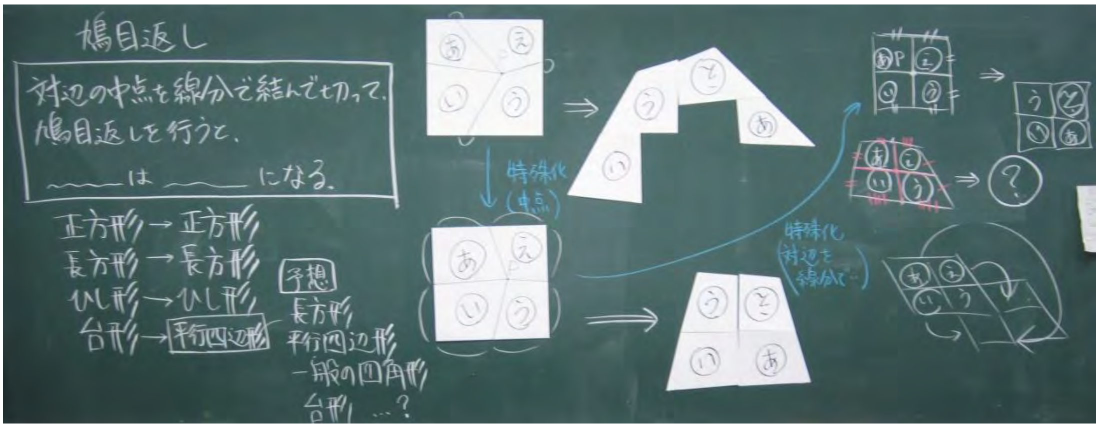


図 19　結果の見通しを促すことを意図した本時の板書

ここで「なぜ平行四辺形になるのか」と発問し，証明を考えさせた。なお，本時で扱う証明は用いる記号がかなり多いため，図に印や言葉等を加えた程

度の視覚的なまとめでよいと伝えた。まず四角形であること，次に平行四辺形になることの証明を，個人及び任意のグループで考えていき，２人の代表生徒に説明させ，質問・意見を共有した。

黒板を見て過程を振り返らせ,この切り方の鳩目返しについて「台形は平行四辺形になる」と言語化してまとめた。続いて，「条件を変えるとどんなことがいえるでしょうか。」と投げかけた後，「どんな変え方がありますか。」と問いかけた。すると生徒たちは「もとの図形を一般の四角形にする」,「凹形四角形にする」,「三角形にする」,「切り方を変えて長方形にする」などと発表した。これらを例とし，「どの条件をどのように変えたいか」及び「それはなぜか」といった着想や動機をプリントに記入させた上で，新たな性質を考えた。

例えば Nm 生はもとの図形を凹四角形に発展させた(図 20)。「予想がつかない」ことが問いの原動力となっており，証明が台形と同じになること，及び既習の凹形四角形の性質が説明できていることなどに気付いていることが「分かったこと」の記述から読み取れる。

また Km 生は三角形に発展させた(図 21)。「気になる」ので辺の数を減らし，様々な三角形で試した後，これらを統合することで性質を得ている。また，

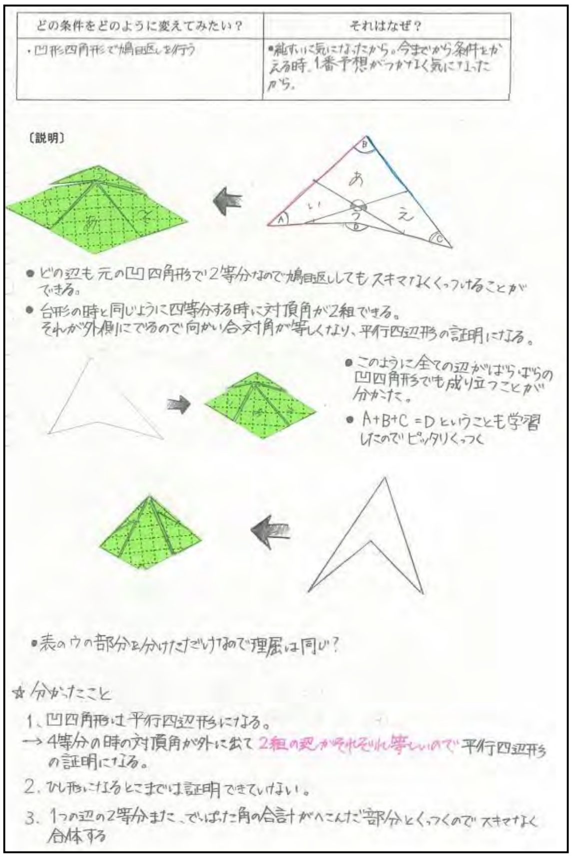


図 20 Nm 生の記述(凹四角形に発展)

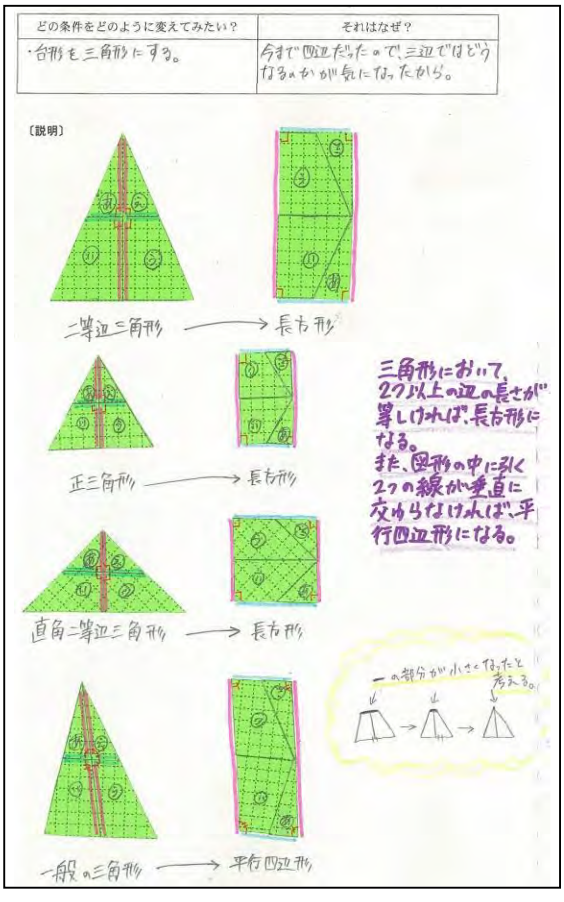


図 21 Km 生の記述(三角形に発展)

台形と三角形の関係を動的かつ統合的に捉えることで，結果が同じになることに気付いていることが右側の記述から読み取れる。

このように，生徒が「図形の性質を見いだし発展させる活動」において，条件を変える際に,「何を何に変えたのか」「なぜそう変えようと思ったのか」などといった着想や動機を記述させることで，生徒の見通しや振り返りを促すことができると解釈できる。つまり，生徒のメタ認知を促すことに効果的でありそうだということである。原題の条件を一部変えて考える際，教師に指示されるままただ闇雲に無目的に行っていては,「本質を探り究める」という意味の探究的な学びとはかけ離れてしまう。生徒が何かしら明らかにしたい事柄（結果の見通し，予想）があって，それを明らかにするためのレポートにしたい。そのような活動の主体性に裏付けられて，生徒の数学的な思考力・表現力，ひいては自律的活動力が育つと考えられる。

ただ，［留意点Ⅲ］については，本当に生徒の見通しや振り返りを促すことに効果的であるかどうかは，学習者の立場で検討する余地がある。これについては，次章「５．着想と動機の記述についての調査」でアンケート結果を基に述べる。

（３）学習評価

［留意点Ⅳ］	生徒がレポートの作成前にどのような活動が期待されているかを生徒が見通せるように，評価の観点と評価規準を予め生徒と共有しておく。
［留意点Ⅴ］	生徒がレポートの提出後に評価を受け取ったとき，なぜその評価結果なのかを理解できるように，「十分満足できる」状況（Ａ）であるかどうかを判定するための視点を例示しておき，そこに〇印等をつけることで教師の採点とする。

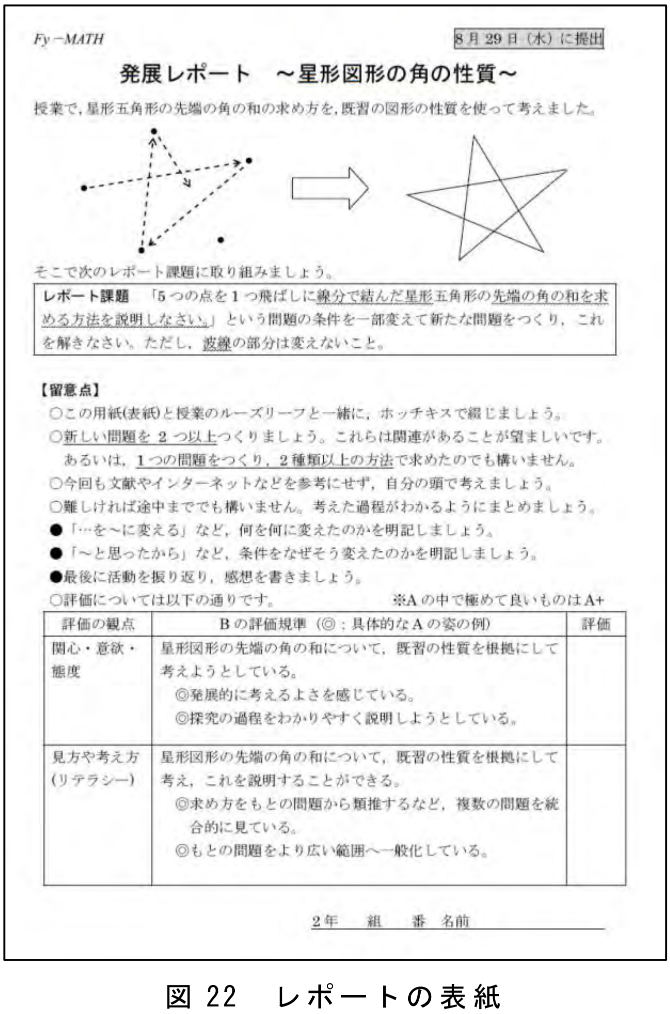
ここでは，第２学年「Ｂ図形」領域の教材「星形図形の角の性質」を例に，学習評価の進め方について説明する。

事例：２年「Ｂ図形」領域　　「星形図形の角の性質」

「平行と合同」単元末に星形五角形の角の和が 180° であることの説明が教科書でよく取り上げられる。多角形の内角の和の性質や外角の和の性質，平行線の性質などを用いて，多様な方法で 180° を説明する教材である。その扱いの後で，条件を一部変えて取り組むレポート課題を出題した。図 22 はレポートの表紙である。

出題に当たっては，原題を「5 つの点を 1 つ飛ばしに線分で結んだ星形五角形」として，何の条件をどのように変えればよいかという見通しを立てやすいように配慮している。また，レポートに書く内容，具体的には「新しい問題を 2 つ以上（あるいは 1 つの問題で 2 つ以上の方法で）」「何を何に変えたのか」「条件をなぜそう変えたのか」「最後に感想」を明示している。

評価については，表紙に評価の観点と大まかな規準を載せるとともに,「十分満足できる」状況（A）かどうかを判定するための視点を「◎」印で例示した（他にもAとなる


Fy－MATH　　8月29日（水）に提出

発展レポート　～星形図形の角の性質～

授業で，星形五角形の先端の角の和の求め方を，既習の図形の性質を使って考えました。

そこで次のレポート課題に取り組みましょう。

レポート課題　「5つの点を1つ飛ばしに線分で結んだ星形五角形の先端の角の和を求める方法を説明しなさい。」という問題の条件を一部変えて新たな問題をつくり，これを解きなさい。ただし，波線の部分は変えないこと。

【留意点】
〇この用紙(表紙)と授業のルーズリーフと一緒に，ホッチキスで綴じましょう。
〇新しい問題を 2 つ以上つくりましょう。これらは関連があることが望ましいです。
　あるいは，1つの問題をつくり，2種類以上の方法で求めたのでも構いません。
〇今回も文献やインターネットなどを参考にせず，自分の頭で考えましょう。
〇難しければ途中まででも構いません。考えた過程がわかるようにまとめましょう。
●「…を～に変える」など，何を何に変えたのかを明記しましょう。
●「～と思ったから」など，条件をなぜそう変えたのかを明記しましょう。
●最後に活動を振り返り，感想を書きましょう。
〇評価については以下の通りです。　　※Aの中で極めて良いものはA+

評価の観点	Bの評価規準（◎：具体的なAの姿の例）	評価
関心・意欲・態度	星形図形の先端の角の和について，既習の性質を根拠にして考えようとしている。 ◎発展的に考えるよさを感じている。 ◎探究の過程をわかりやすく説明しようとしている。	
見方や考え方(リテラシー)	星形図形の先端の角の和について，既習の性質を根拠にして考え，これを説明することができる。 ◎求め方をもとの問題から類推するなど，複数の問題を統合的に見ている。 ◎もとの問題をより広い範囲へ一般化している。	

2年　組　番　名前

図 22　レポートの表紙

姿は想定されている)。これは，生徒がどのような活動が期待されているのかを漠然とでありながら理解することで，生徒が活動の見通しを立てられるようにしたかったからである。

採点にあたっては，実際の評価に当たっては，課題に即した評価基準（ルーブリック）が必要である。採点が恣意的・独断的にならないように，複数の教師が共同的に評価基準（ルーブリック）の作成や採点にあたる「グループ・モデレーション」（松下，2007）の実施も考えられる。

採点結果は，表紙にある評価規準に照らして，Ａ＋，Ａ，Ｂ，Ｃの４段階で行った。Bは「おおむね満足できる」状況であり，Aは「十分満足できる」状況である。生徒の実態をみて，進んだ生徒を一層伸ばすという教育的配慮から，Aの中でも特に秀でていた点があればこれを価値付け，Ａ＋をつけた。具体的には，各観点で例示した「◎」印について，１つも満たしていないが規準は満たしているという場合にはＢを，１つ満たしている場合にはＡを，２つ満たしている場合にはＡ＋をつけた。その旨が生徒に伝わるように，満たしている「◎」印の視点を赤ペンでチェックを書いて返却するようにした。「◎」印で例示した以外の秀でた面が確認された場合には，新たな視点を「◎・・・」のように新たに個別に加筆してチェックを書くようにした。

なお，図 22 の評価の観点「数学的な見方や考え方」の下に記載してある「リテラシー」とは，筆者の勤務校で行っている神奈川県立光陵高等学校との連携型中高一貫教育の柱となる学力である（横浜国立大学・神奈川県教育委員会，2007)。推薦者選抜で用いるための独自の評価の観点でもある。当教育では，社会をよりよく生き抜くための幅広い能力を「リテラシー」と呼び，文部科学省が設ける評価の観点を生かして各教科で設けた規準を加えて評価している。数学科における「リテラシー」は以下のとおりである。

- リテラシーa：既習の数学を基にして，数や図形の性質などを見いだしたり，もとの問題の条件を変えて新たな問題をつくって解決したりする力
- リテラシーb：社会の問題を，数学の問題に置き換えて解決したり解釈したりする力

（４） 成果の共有

［留意点Ⅵ］ 生徒がよりよい思考や表現に気付くように，ねらいや留意点を明示した上で小グループ等でレポートを発表，相互評価させ，自分のレポートを可能な範囲で改善させる。

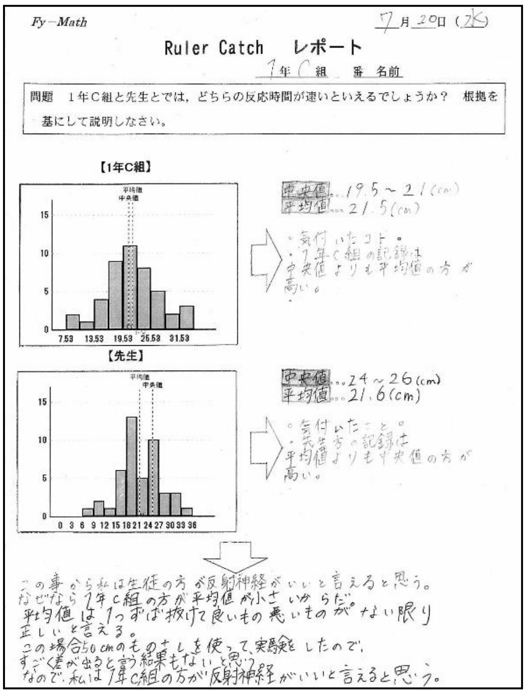
ここでは，第１学年の「Ｄ資料の活用」領域の教材「Ruler Catch」の授業を例に，レポートの成果の共有について説明する。

図 23 実験の様子

事例：１年「Ｄ資料の活用」領域　「Ruler Catch」

教材「Ruler Catch」は，落下する定規を瞬時に掴むという単純反応時間のデータを扱ったものである(藤原，2011a；藤原，2012c；藤原，2012d；藤原，2013c；藤原，2013d)。実際のデータが比較的集めやすく，楽しく活動できて，なおかつ人権上の配慮もあまり必要としないため，授業で取り上げやすい。

筆者は，生徒の学級と教員とを比較して，どちらの単純反応時間が速いといえるのかを結論付けて説明させる問題を取り上げた。第１－２時では，実験の仕方を生徒とのやりとりで決めた上で実験し，データを収集し，PC 室で統計ソフト SimpleHist や Stathist を使ってレポートを作成した（例えば，図 24)。夏季休業の直前に実践することで，不十分な点は夏季休業中に時間をかけて家庭で補足できるようにした。



Fy－Math　　7月20日（水）

Ruler Catch　レポート

7年C組　番　名前

問題　１年Ｃ組と先生とでは，どちらの反応時間が速いといえるでしょうか？　根拠を基にして説明しなさい。

【1年C組】

中央値…19.5～21(cm)
平均値…21.5(cm)

・気付いたコト。
・7年C組の記録は中央値よりも平均値の方が高い。

【先生】

中央値…24～26(cm)
平均値…21.6(cm)

・気付いたこと。
・先生方の記録は平均値よりも中央値の方が高い。

この事から私は生徒の方が反射神経がいいと言えると思う。
なぜなら7年C組の方が平均値が小さいからだ。
平均値は1つずば抜けて良いもの悪いものがない限り正しいと言える。
この場合50cmのものさしを使って実験をしたので，すごく差が出ると言う結果もないと思う
なので，私は7年C組の方が反射神経がいいと言えると思う。

図 24　Yd 生の１回目のレポート

第３時(夏季休業中の８月の登校日)では問題を改めて確認し,統計を根拠としたよい説明のポイントを,レポートの発表を通して考えるという本時のねらいを伝えた。この後４人グループで発表と質疑を１人４分程度で行わせました（図 25)。その際，活動の質を高めるため，事前に話し手と聞き手の留意点を板書してその意図を理解させました。

話し手：残りの３人がよく見えるようにレポートを置いて話す。
　　　　レポートの大切な部分や工夫点などがよくわかるように話す。
聞き手：次の視点で発表を聞き，意見して改善点を指摘する。

［結論］説得力があるか？	［根拠］　妥当か？
［用語］正しく用いているか？	［グラフ］よりよい表し方はないか？

４人グループで発表と質疑を終えた後，机の配置を元に戻し，よい説明のポイントを問いかけた。すると上記の４つの視点を基に，「代表値を正確に,できれば複数を示す」,「両者のグラフの階級幅や縦軸目盛，最初の階級の最小値を揃える」,「用語は正しく用いる」という考えが出された。また，「ここでは最頻値は結論の根拠にならない」という意見が生徒から出され，話し合いの結果，全体の合意を得た。


図 25　グループでの発表

次に，得られた結論を改めて問うと，ほとんどの生徒の結論が「Ｃ組が速い」と答えた。しかし平均値も中央値も僅差であることから,「明確に速いとは言い切れない」という結論に落ち着いた。

そこで，生徒に対して先生の分布の双峰性に着目させ,「速い先生と遅い先生に分けられそうである」,「分け方によって「Ｃ組は○○よりは遅いが△△よりは速い」という詳細で明確な結論が得られるかもしれない」という考えを筆者から提案した。生徒たちは納得の様子で，男女，年齢，顧問の部活，視力によって２つの単峰型の分布に分かれるのでは,という予想を発表した。

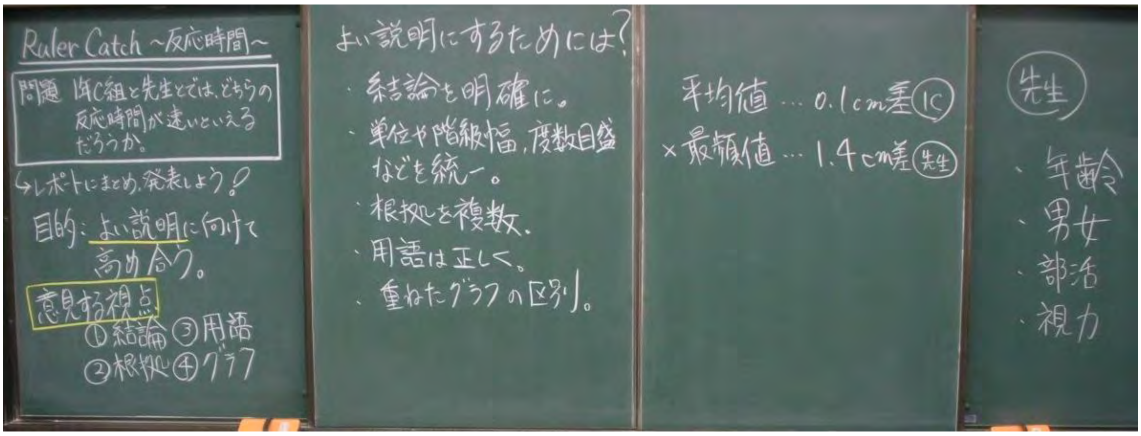


図 26　第３時の板書

第３時の予想を基に，先生のデータを年齢で層別したもの（「40 歳以上の先生」と「40 歳未満の先生」)，性別で層別したもの（「男性の先生」と「女性の先生」）を生徒共有ハードディスクに予め保存しておいた。生徒の活動が広がり過ぎないように一定の制約を設けることがそのねらいである。

第４時では,第３時の予想を基に仮説（結論の見通し）を個人で立てさせ，４人グループで意見交換し，各自の目的意識を高めました。第５－６時では統計ソフトを使って第４時に立てた仮説の検証成果をレポートにまとめさせた。その際，第３時の「よい説明のポイント」を踏まえるようにさせた。例えば，同生徒のレポートを図 24 と図 27 とで比較すると，最初の階級の最小

値が揃っていたり中央値を明記していたりしている。前後２つのレポートを比較するなどして生徒の思考の流れや表現の洗練具合を読み取り，観点「数学的な見方や考え方」の評価の総括に向けて，評価結果を記録に残した。

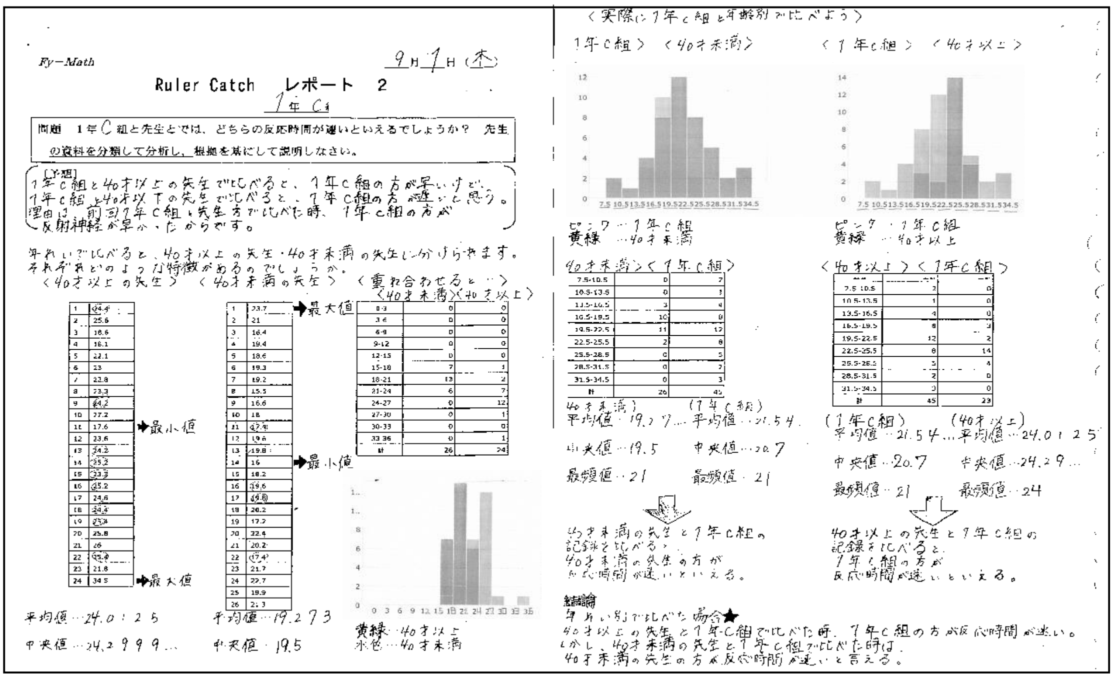


図 27　Yd 生が第５－６時で作成した改善レポート

このように，ねらいや留意点を明示した上で小グループ等でレポートを発表，相互評価させ，自分のレポートを可能な範囲で改善させることで，生徒がよりよい思考や表現に気付くようになる。個人的な振り返りだけだと気付かないことも多いので,共同的な振り返りを促すということである。その際，本事例のように，活動を通して改善の視点が明確に得られるようにすることが大切であると考えられる。

また，相互評価についての指導の重点を，レポートを改善することより活動の価値を認め合うことに置くことも考えられる。活動に費やすことのできる時間や指導のねらいに応じて，実施することが考えられる。

５．着想や動機の記述についての調査

（１）調査の目的と方法

調査の目的は，数学的活動の成果をレポートにまとめる際に「着想や動機を記述すること」が生徒にとって有効かどうか，また，有効であればどのような点で有効なのかを明らかにすることである。そのために，国立大学附属中学校２年生 132 名を対象として,「どっちが広い」(６月)「星形図形の角の和」（12 月）に取り組んだ後，選択式（複数回答可）のアンケート調査を実施した。調査の仮説は以下のとおりである。

【調査の仮説】
数学的活動の成果をレポートにまとめる際に「着想や動機を記述すること」は，生徒の活動の見通しや振り返りなどを促す点で有効であるだろう。

（２）調査の実施と結果

質問項目は以下のとおりである。

（質問項目）
「どっちが広い？」や「星形図形の角の和」の発展レポートで「～と思ったから」など，条件をなぜそう変えたのか（着想や動機）を明記してもらっています。このよさについて，あなたの考えに近いものを次のア～オから<u>すべて</u>選び，記号に○をつけてください。

ア　「これまで何をしようとしていたのか」と，それまでの活動を振り返るのに役立つ。
イ　「今何のためにそうしようとしているのか」と，そのときの考えを整理するのに役立つ。
ウ　「さらに次に何をしようか」と，これからの活動の見通しを立てるのに役立つ。
エ　上記のア～ウ以外のよさがある。
（よさ：　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　）
オ　よさは何も感じられない。
（もしあれば理由：　　　　　　　　　　　　　　　　　　　）

選択肢アは，考えの振り返りを促すことができるという点で有効かどうかをみるために設定した。選択肢イは，考えの整理・記述を促すことが出来るという点で有効かどうかをみるために設定した。選択肢ウは，考えの見通しを促すという点で有効かどうかをみるために設定した。選択肢エは，それ以外の有効な点を見いだすために設定した。選択肢オは，よさが感じられない生徒がいるかどうかをみるために設定した。

集計結果は表１のとおりである。

表１　アンケート調査の結果

	そう思う	そう思わない	合計
よさが感じられる。 （思わない理由：何となくで思いつくものもあるし、論理的な理由を持たず行うから（１人））	129 98%	3 2%	132
そのよさは・・・			
ア．「これまで何をしようとしていたのか」，それまでの活動を振り返るのに役立つ。	47 36%	85 64%	132
イ．「今何のためにそうしようとしているのか」と，そのときの考えを整理するのに役立つ。	83 63%	49 37%	132
ウ．「さらに次に何をしようか」と，これからの活動の見通しを立てるのに役立つ。	90 68%	42 32%	132
エ．上記のア～ウ以外のよさがある。	12 9%	120	
・問題の関連性が見抜きやすい。	4		
・他人が見るときに自分の意思がきちんと伝わる。	2		
・自分が数学に対していよくがあることを自覚する。	1		
・授業で学んだことを振り返ることができ、その問題について深く発展して考えられる。	1		
・一般化するなど、規則を見つけるメリットが分かる。	1		
・自分の直感的に思いついたことを振り返れる。	1		
・そのとき何を考えていたのかを記録できる。	1		
・求めようとしていることが明確になりわかりやすい。	1		

（３）調査結果からの考察

まず，よさが感じられるかどうかについては，選択肢ア～エのうちのどれかに少なくとも１つは選択した生徒は98%いる（表１では「そう思う」と表記）。このことから「着想や動機を記述すること」について肯定的な回答をしている。何らかの理由で，よさがあることがわった。

また，その理由については，ア「活動を振り返るのに役立つ」を選択した生徒は36%であるものの，イ「考えを整理するのに役立つ」を選択した生徒は63%，ウ「活動の見通しを立てるのに役立つ」を選択した生徒は68%おり，生徒自身の見通しや振り返りなどを促す指導的な意味合いがあることがわかった。また，それ以外のエの選択肢を選択した生徒の中にも，見通しと振り返りに関する自由記述があり，見通しや振り返りを促すことがわかる。

これらのことから，数学的活動の成果をレポートにまとめる際に「着想や動機を記述すること」は，生徒の活動の見通しや振り返りなどを促す点で有効であることがわかった。

なお，この結果は，レポート作成の実践に限ったことではなく，日常の授業に向けても示唆的である。つまり，日常の授業おいて，教師が「なぜそう考えたのですか」と着想や動機を問いかけることで，生徒の振り返りや次の見通しを促すと推察されるからである。例えば，授業中の机間巡視しながらの個別の声掛けや生徒の考えを発表した後の声掛けなどで，このような発問を積極的に行うことが考えられる（鈴木，2012）。

６．実践事例とその考察

ここでは，上記の留意点Ⅰ～Ⅵを踏まえて実践した事例及び生徒の記述について３つ報告する。

（１）事例１　２年「Ａ数と式」領域　　「どっちが広い？」（藤原，2013e）

①目標

平成 24 年６月に行った本事例の目標は，以下のとおりである。

> 文字を用いて表現したり，目的に応じて式を変形したり，その意味を読み取ったりして，命題が成り立つことを説明することができる。

この目標を達成するために，レポートの作成及びミニ発表会を行った。

②問題

本事例では，まず原題として以下の問題を扱う。

> **問題**　正方形に内接する１個の円（図１）と，同じ正方形の１辺に３個並ぶように内接した９個の円（図２）とでは，どちらの面積が広いだろうか。

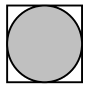
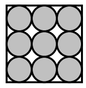



図１　図２

具体的な数や文字を用いて，面積が等しいことを説明させた後，「どんなときでも成り立つのかなぁ」などと問いかけ，一辺に並ぶ円の個数や図形などを変えて探究することを期待して，次のレポートの問題に取り組ませる。

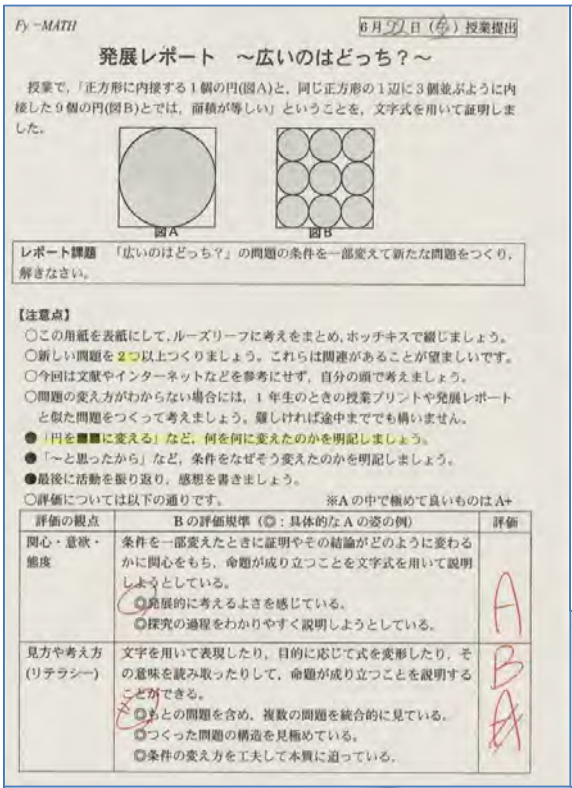
> **問題**　「広いのはどっち？」の問題の条件を一部変えて，新たな問題をつくり，解きなさい。

③実施の方法，評価規準

レポートの作成にあたっては，新しい問題を２つ以上つくることを求めた。条件をどのように変えたらよいかがわからない生徒への手立てとしては，第１学年で実施した「ストローの問題」（ストローではしご状に横へ並べていったときの本数を求める問題）とその発展的な扱い（条件変え）によるレポート（夏季休業の課題として出題）を振り返って見通しを立てるようにさせた。また，「何を何に変えたのか」，「条件をなぜそう考えたのか」，及び感想を書かせるようにして，生徒が見通しと振り返りを繰り返しながら自律的に探究を進められるようにした。

評価規準については，おおまかなものを表紙（図 28 の左上）に明記し，どのような力を身に付けることを教師が期待しているのかを生徒と共有し，活動をある程度方向付けようと試みた。

また，家庭学習としてレポート課題を出すと提出できない生徒もいると考えられるため，授業で２時間確保して考えさせた。２時間の授業の最後には，15 分間ほど近くの生徒と相談してもよい時間を設け，原題の解決を振り返ったり他の生徒の考え比較したりさせた。一週間後の授業を提出期限とした。



Fy −MATH　　6月22日（金）授業提出

発展レポート　～広いのはどっち？～

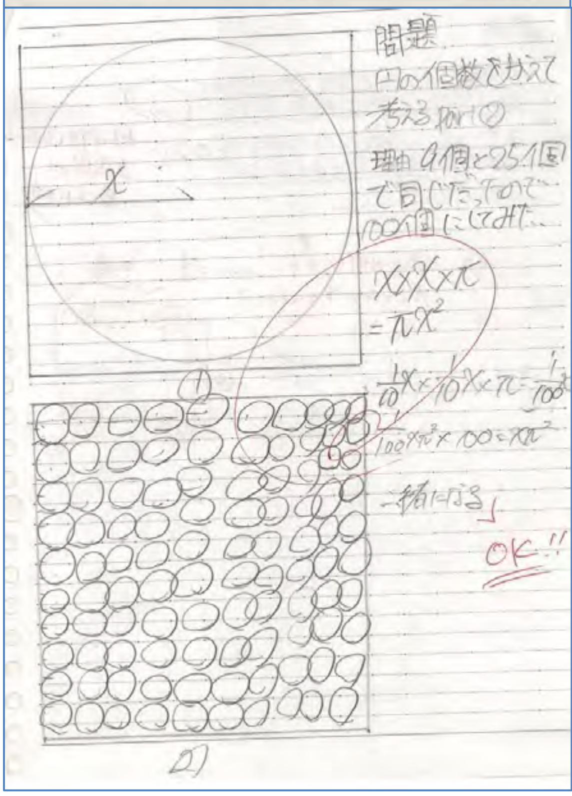
授業で，「正方形に内接する1個の円(図A)と，同じ正方形の1辺に3個並ぶように内接した9個の円(図B)とでは，面積が等しい」ということを，文字式を用いて証明しました。

図A　図B

レポート課題　「広いのはどっち？」の問題の条件を一部変えて新たな問題をつくり，解きなさい。

【注意点】
○この用紙を表紙にして，ルーズリーフに考えをまとめ，ホッチキスで綴じましょう。
○新しい問題を2つ以上つくりましょう。これらは関連があることが望ましいです。
○今回は文献やインターネットなどを参考にせず，自分の頭で考えましょう。
○問題の変え方がわからない場合には，1年生のときの授業プリントや発展レポートと似た問題をつくって考えましょう。難しければ途中まででも構いません。
●「円を■■に変える」など，何を何に変えたのかを明記しましょう。
●「～と思ったから」など，条件をなぜそう変えたのかを明記しましょう。
●最後に活動を振り返り，感想を書きましょう。
○評価については以下の通りです。　※Aの中で極めて良いものはA+

評価の観点	Bの評価規準（◎：具体的なAの姿の例）	評価
関心・意欲・態度	条件を一部変えたときに証明やその結論がどのように変わるかに関心をもち，命題が成り立つことを文字式を用いて説明しようとしている。 ◎発展的に考えるよさを感じている。 ◎探究の過程をわかりやすく説明しようとしている。	A
見方や考え方(リテラシー)	文字を用いて表現したり，目的に応じて式を変形したり，その意味を読み取ったりして，命題が成り立つことを説明することができる。 ◎もとの問題を含め，複数の問題を統合的に見ている。 ◎つくった問題の構造を見極めている。 ◎条件の変え方を工夫して本質に迫っている。	~~B~~ A



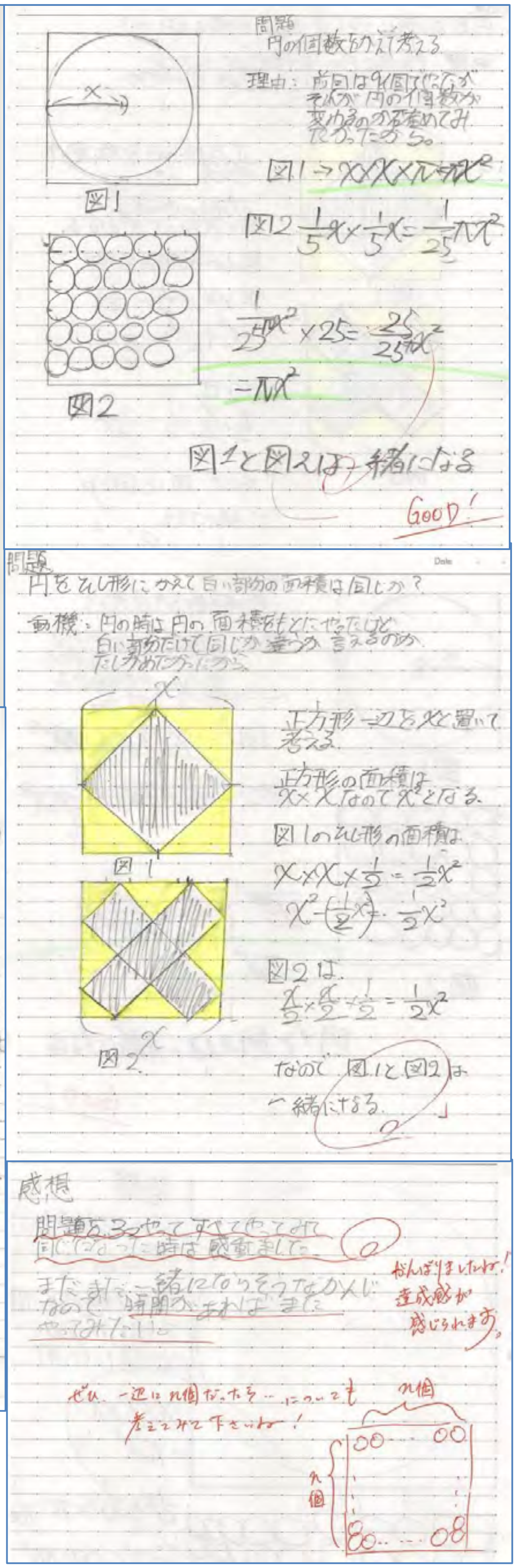


図28　Km生のレポート
（円を５×５，10×10にする，
円をひし形（正方形）に変える）

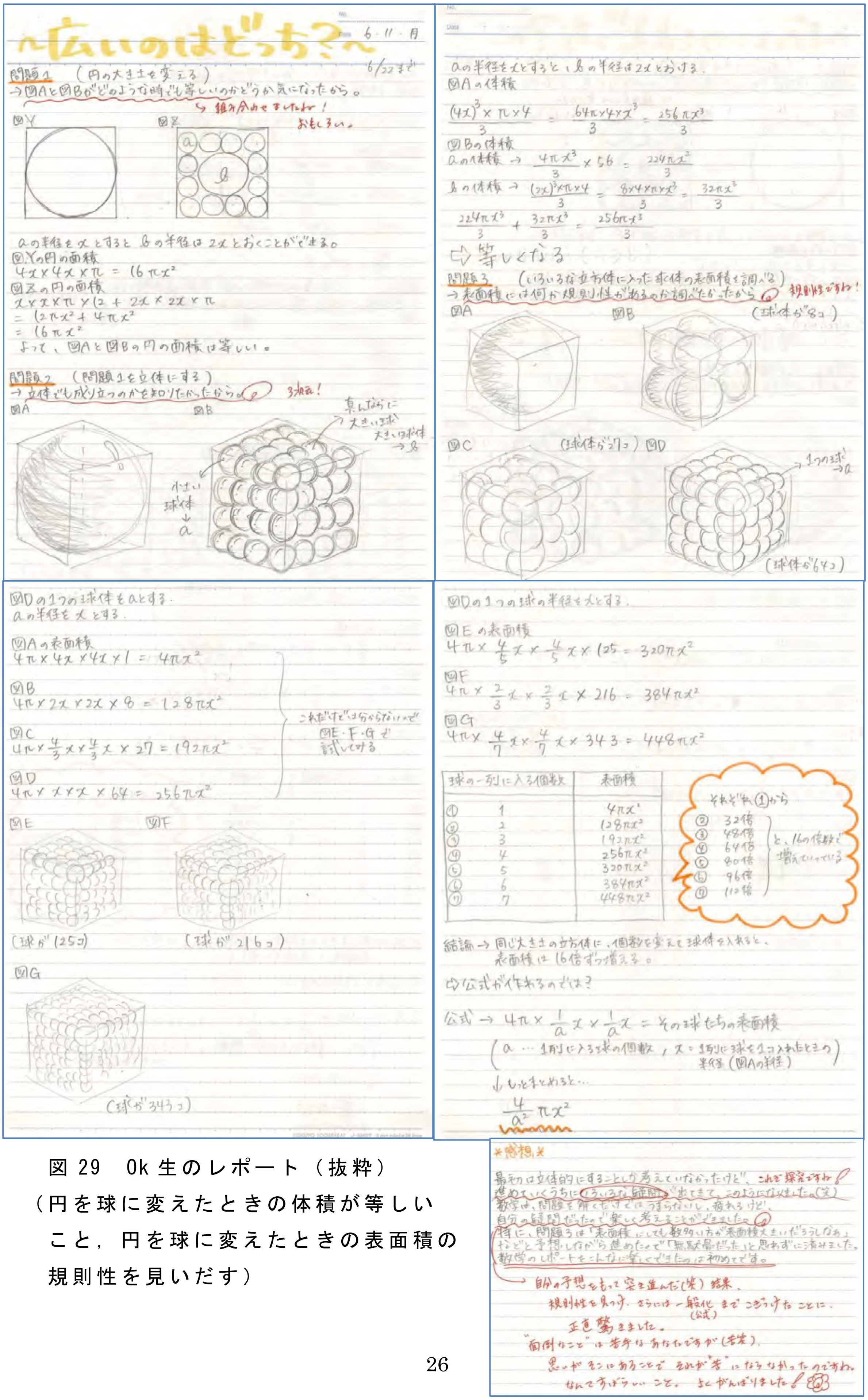


図 29　Ok 生のレポート（抜粋）
（円を球に変えたときの体積が等しいこと，円を球に変えたときの表面積の規則性を見いだす）

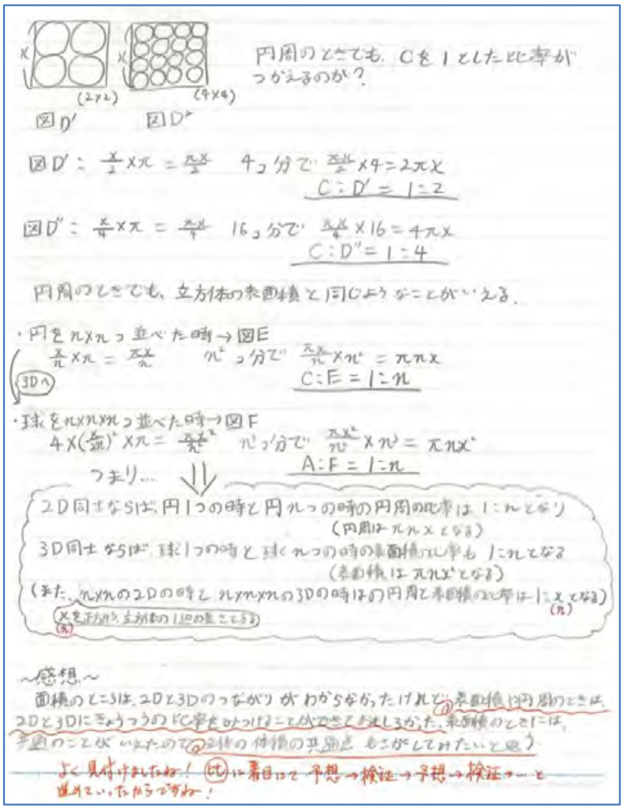


図 30　Oj 生のレポートのまとめ・感想（円（２次元）を球（３次元）にして，表面積の比率がどう変わるかという規則性を見付ける）

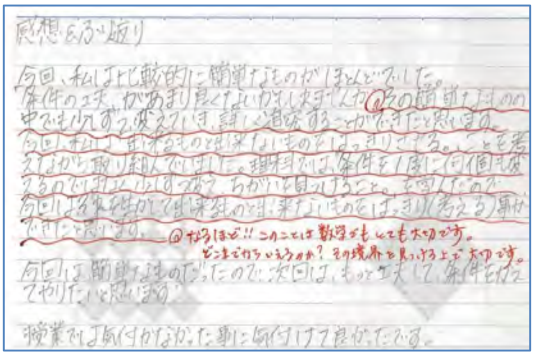


図 31　Ik 生のレポートの感想

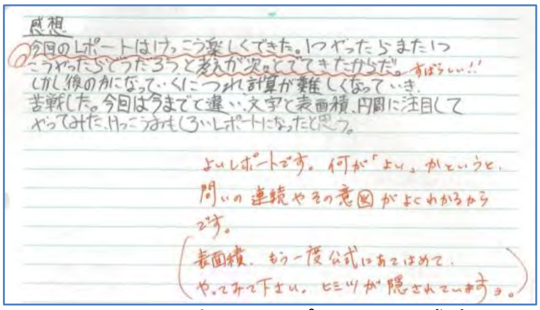


図 32　Ed 生のレポートの感想

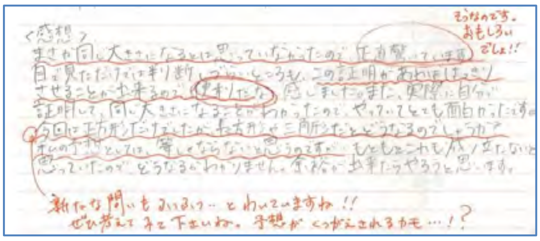


図 33　Tz 生のレポートの感想

③ 生徒の活動とその考察

数学の得意・不得意に関係なく，各自の予想や疑問を基に主体的に探究する様子が授業観察や記述から解釈できた。Tz 生の感想からは，条件を変えて予想を立てて，文字式を用いて検証・説明することで，徐々に抵抗感なく活動に取り組めていると解釈できる。また，「自分の疑問だったので楽しく考えることができました」（Ok 生），「１つやったらまた１つこうやったらどうだろうと考えが次々とでてきた」（Ed 生）という感想からは，生徒が主体的・自律的に数学的活動に取り組めている様子が窺える。また，「簡単なものの中でも少しずつ変えていき，詳しく追及」「出来るものと出来ないものをはっきりさせることを考えながら」（Ik 生），「2D と 3D にきょうつうの比率をみつける」（Oj 生）という感想からは，数学的な探究の方法への気付きが窺える。

教師が評価結果を書いた後は各自に返却し，４人グループでミニ発表会を行った。話し手には「何を何に変えたらどうなったか」「なぜそれを変えようと思ったのか」を発表させるとともに，聞き手には条件の変え方や文字の置き方の工夫に着目して解釈させ，互いのよさを認めることに力点を置いた。

（２）事例２　３年「Ａ数と式」領域　　「道幅一定の道路の面積」

①目標

平成 25 年 5 月に行った本事例の目標は，以下のとおりである。

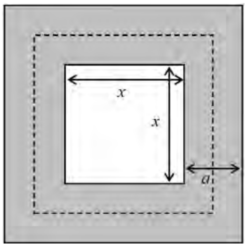
図形の性質が成り立つことを，数量及び数量の関係をとらえ，方針を明らかにして，文字を用いた式で説明することができる。

この目標を達成するために，レポートの作成及びミニ発表会を行った。

②問題とその扱い方

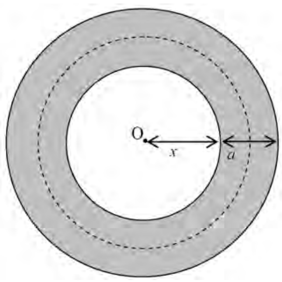
本事例では，まず原題として以下の問題 1 を扱う（藤原，2011b)。

問題１　図のような道幅が一定の道路の面積を S とすると S を a と x を用いて表しなさい。



授業ではいろいろな考えを取り上げて関連付けた後で，最後に，説明に用いた式の変形を振り返り，道路のセンターラインの長さを ℓ とするとき S＝$a\ell$ の関係が新たに成り立つことを見いださせる。次の授業では，線分で囲まれた代表的な図形（正方形）で S＝$a\ell$ の関係が成り立ったことを踏まえて（結果の振り返り)，曲線で囲まれた代表的な図形では成り立つかと全体に問いかけ（結果の見通し)，生徒から「円なら成り立ちそう」というあがるタイミングで，次の問題２に取り組ませる。

問題２　前回の授業で見いだした S＝$a\ell$ の関係は，図のような道幅が一定の道路においても成り立つでしょうか。



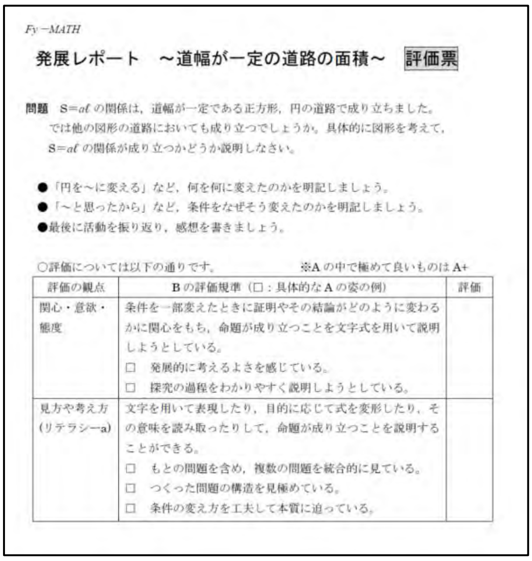
その上で，次のレポートの問題を提示する。

問題　S＝$a\ell$ の関係は，道幅が一定である正方形，円の道路で成り立ちました。ではほかの図形の道路においても成り立つでしょうか。具体的に図形を考えて，S＝$a\ell$ の関係が成り立つかどうか説明しなさい。

④ 実施の方法，評価規準

実施の方法，評価規準については，図 34 の表紙のとおりである。何を何に変えたか，なぜ変えたかを明記させるようにして，見通しや振り返りを繰り返しながら探究できるようにした。

また，家庭学習としてレポート課題を出すと提出できない生徒もいると考えられるため，授業で 1.5 時間確保して考えさせた。1.5 時間の授業の最後には，15 分間ほど近くの生徒と相談してもよい時間を設け，原題の解決の授業で学んだ考え方を振り返ったり他の生徒の考えと自分の考えを比較したりさせた。さらに考えて加筆したいという生徒もいたため，一週間後の授業を提出期限とした。



Fy−MATH

発展レポート　～道幅が一定の道路の面積～　評価票

問題　S＝al の関係は，道幅が一定である正方形，円の道路で成り立ちました。
では他の図形の道路においても成り立つでしょうか。具体的に図形を考えて，
S＝al の関係が成り立つかどうか説明しなさい。

●「円を～に変える」など，何を何に変えたのかを明記しましょう。
●「～と思ったから」など，条件をなぜそう変えたのかを明記しましょう。
●最後に活動を振り返り，感想を書きましょう。

○評価については以下の通りです。　　※A の中で極めて良いものは A+

評価の観点	B の評価規準（□：具体的な A の姿の例）	評価
関心・意欲・態度	条件を一部変えたときに証明やその結論がどのように変わるかに関心をもち，命題が成り立つことを文字式を用いて説明しようとしている。 □　発展的に考えるよさを感じている。 □　探究の過程をわかりやすく説明しようとしている。	
見方や考え方（リテラシ―a）	文字を用いて表現したり，目的に応じて式を変形したり，その意味を読み取ったりして，命題が成り立つことを説明することができる。 □　もとの問題を含め，複数の問題を統合的に見ている。 □　つくった問題の構造を見極めている。 □　条件の変え方を工夫して本質に迫っている。	

図 34　レポートの評価票

⑤ 生徒の活動とその考察

第 1 時では，多様な考えが出された。その後のレポート作成の際に振り返りを促すことできるように，他者の考えもワークシートに記述させた（図 35）。

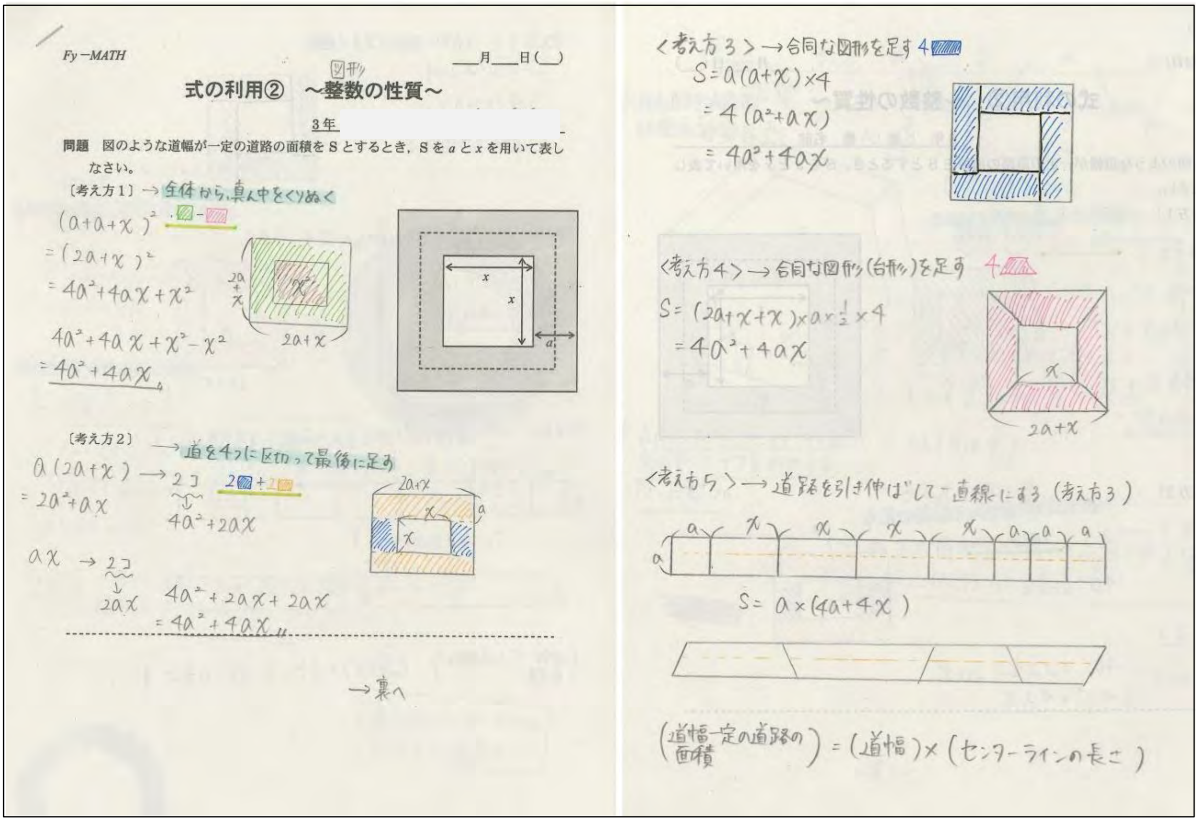


図 35　Sy 生のワークシートの記述

全体では，「全体から一部分を引く」「合同な長方形に分ける」「合同な台形に分ける」「角と長方形に分ける」などの考えを取り上げた（図 36）。

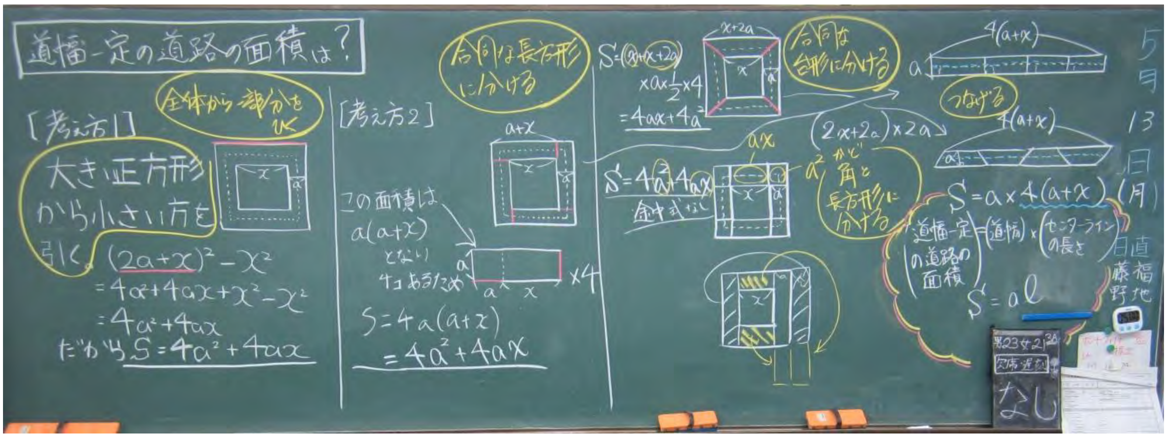
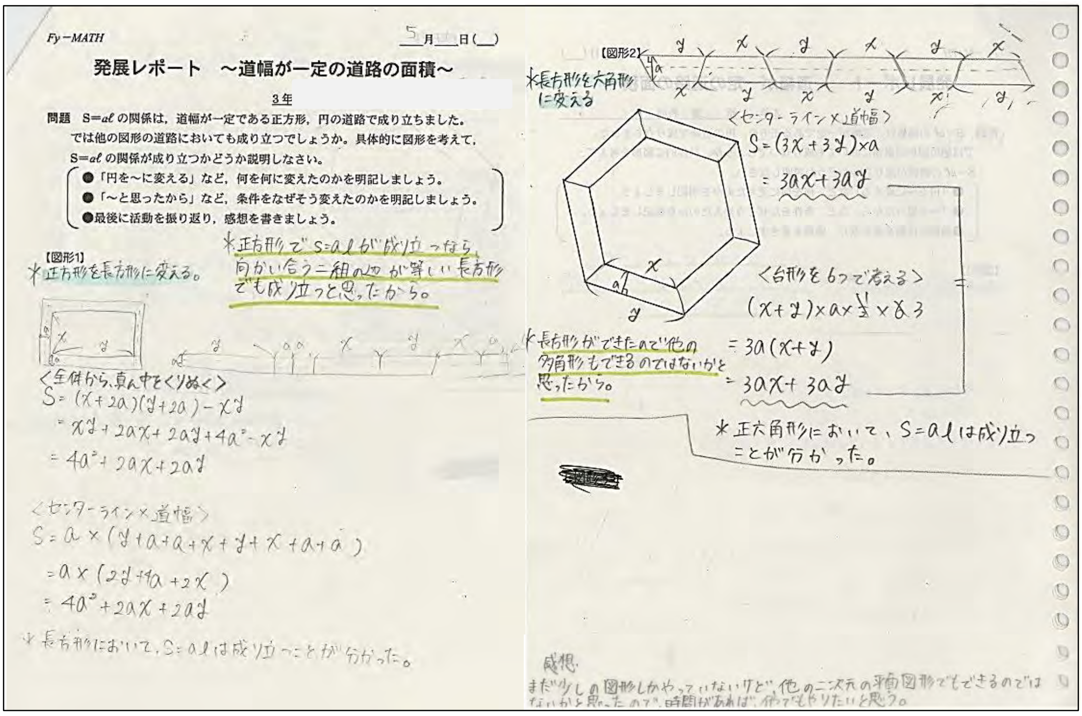


図 36　第 1 時の板書

第 1 時では，合同な長方形や台形に分けた後に並び替えて考えていた生徒がいたため，その生徒の考えを取り上げ，$S=a\ell$ の関係が正方形の道路で成り立つことをまとめた。

第 2 時では，どんな図形でも成り立つのかとまず問いかけたところ,「多角形なら成り立つ」「曲線では成り立たない」などの声があがった。「曲線では成り立たないの？」と再度問いかけた後に「円なら成り立ちそう」という声があがり，そのタイミングで問題 2 を提示して考えさせた。ここで,「数の性質が成り立つことを，文字を用いた式で数量や数量の関係をとらえ，方針を明らかにして説明すること」を指導した。文字を用いて，どのように表現すればよいか，第 1 時のどの考えを用いたのか，説明の組み立てをどうすればよいのか，について力点を置いてまとめた。そのあと，レポートの問題を提示して，レポートに取り組ませた。レポートの例は図 37～40 である。


Fy－MATH　5月　日(　)

発展レポート　～道幅が一定の道路の面積～

3年

問題　S＝$a\ell$ の関係は，道幅が一定である正方形，円の道路で成り立ちました。
では他の図形の道路においても成り立つでしょうか。具体的に図形を考えて，S＝$a\ell$ の関係が成り立つかどうか説明しなさい。

- 「円を～に変える」など，何を何に変えたのかを明記しましょう。
- 「～と思ったから」など，条件をなぜそう変えたのかを明記しましょう。
- 最後に活動を振り返り，感想を書きましょう。

【図形1】
＊正方形を長方形に変える。
＊正方形で S=aℓ が成り立つなら，向かい合う二組の辺が等しい長方形でも成り立つと思ったから。

＜全体から，真ん中をくりぬく＞
$S=(x+2a)(y+2a)-xy$
$=xy+2ax+2ay+4a^2-xy$
$=4a^2+2ax+2ay$

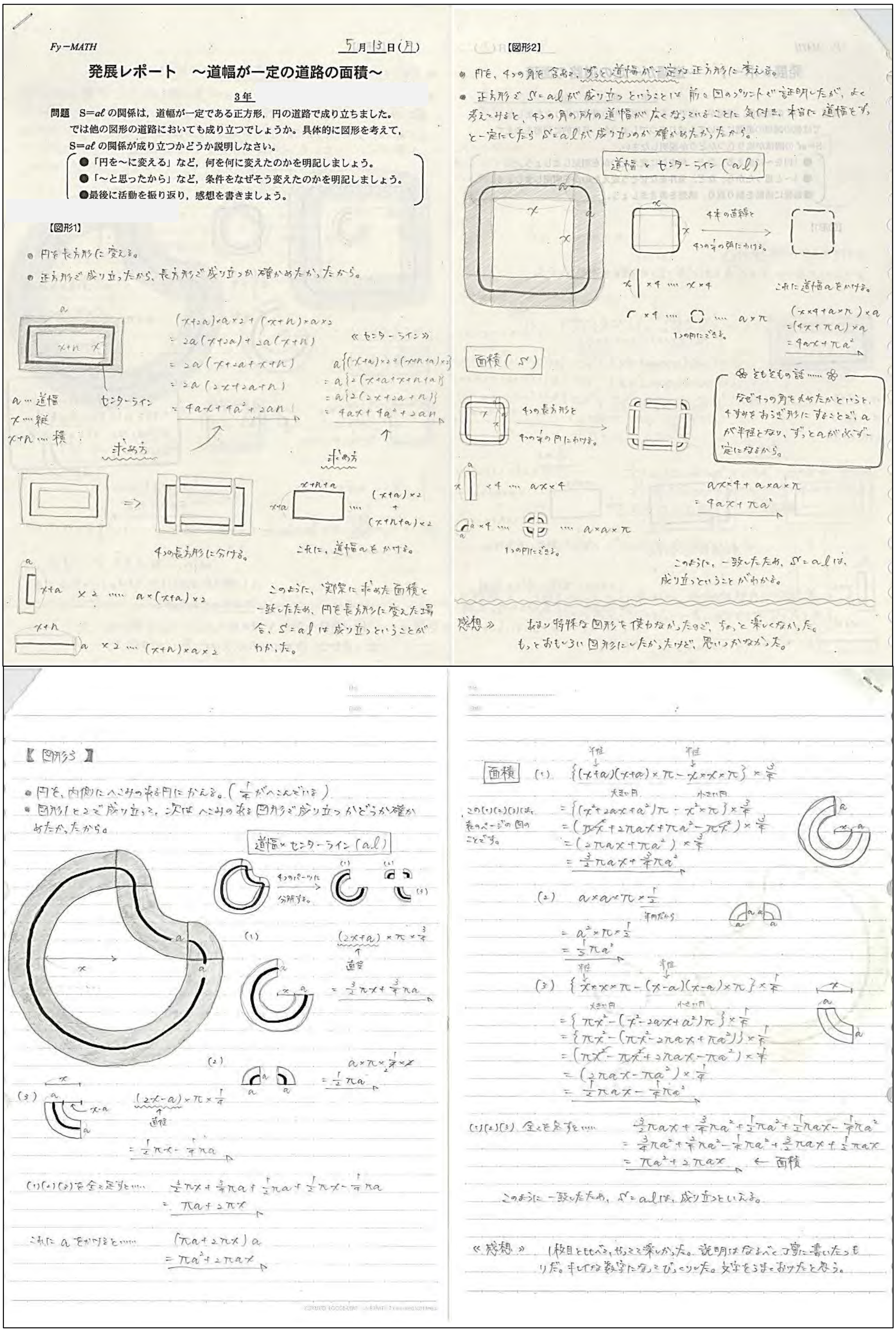
＜センターライン×道幅＞
$S=a\times(y+a+a+x+y+x+a+a)$
$=a\times(2y+4a+2x)$
$=4a^2+2ax+2ay$
＊長方形において，S=aℓ は成り立つことが分かった。

【図形2】
＊長方形を六角形に変える
＜センターライン×道幅＞
$S=(3x+3y)\times a$
$=3ax+3ay$
＜台形を6つで考える＞
$(x+y)\times a\times\frac{1}{2}\times6$
$=3a(x+y)$
$=3ax+3ay$
＊長方形ができたので他の多角形もできるのではないかと思ったから。
＊正六角形において，S=aℓ は成り立つことが分かった。

[redacted]

感想
まだ少しの図形しかやっていないけど，他の二次元の平面図形でもできるのではないかと思ったので，時間があれば，何でもやりたいと思う。

図 37　Sy 生のレポート（長方形，正六角形）



Fy－MATH　　5月13日(月)

発展レポート　～道幅が一定の道路の面積～

3年

問題　S=aℓの関係は，道幅が一定である正方形，円の道路で成り立ちました。
では他の図形の道路においても成り立つでしょうか。具体的に図形を考えて，
S=aℓの関係が成り立つかどうか説明しなさい。

● 「円を～に変える」など，何を何に変えたのかを明記しましょう。
● 「～と思ったから」など，条件をなぜそう変えたのかを明記しましょう。
● 最後に活動を振り返り，感想を書きましょう。

【図形1】

● 円を長方形に変える。
● 正方形で成り立ったから、長方形で成り立つか確かめたかったから。

a…道幅
x…縦
x+n…横

$(x+2a)\times a\times 2+(x+n)\times a\times 2$
$=2a(x+2a)+2a(x+n)$
$=2a(x+2a+x+n)$
$=2a(2x+2a+n)$
$=4ax+4a^2+2an$

《センターライン》

$a\{(x+a)\times 2+(x+n+a)\times 2\}$
$=a\{2(x+a+x+n+a)\}$
$=a\{2(2x+2a+n)\}$
$=4ax+4a^2+2an$

求め方

4つの長方形に分ける。

これに，道幅aをかける。

$(x+a)\times 2$ + $(x+n+a)\times 2$

$\times 2$ …… $a\times(x+a)\times 2$

$\times 2$ …… $(x+n)\times a\times 2$

このように，実際に求めた面積と一致したため，円を長方形に変えた場合，S=aℓは成り立つということがわかった。

【図形2】

● 円を，4つの角を含めて，ずっと道幅が一定な正方形に変える。
● 正方形でS=aℓが成り立つということは前の回のプリントで証明したが，よく考えてみると，4つの角の所の道幅が広くなっていることに気付き，本当に道幅をずっと一定にしたらS=aℓが成り立つのか確かめたかったから。

道幅×センターライン(aℓ)

4本の直線と4つの¼の円に分ける。

これに道幅aをかける。

$x\times 4$ …… $x\times 4$

…… $a\times\pi$

1つの円になる。

$(x\times 4+a\times\pi)\times a$
$=(4x+\pi a)\times a$
$=4ax+\pi a^2$

面積(S)

4つの長方形と4つの¼の円に分ける。

✿ そもそもの話 …… ✿
なぜ4つの角を丸めたかというと，4すみをおうぎ形にすることで，aが半径となり，ずっとaが必ず一定になるから。

$\times 4$ …… $a x\times 4$

$\times 4$ …… $a\times a\times\pi$

1つの円になる。

$ax\times 4+a\times a\times\pi$
$=4ax+\pi a^2$

このように，一致したため，S=aℓは，成り立つということがわかる。

感想》あまり特殊な図形を使わなかったので，ちょっと楽しくなかった。もっとおもしろい図形にしたかったけど，思いつかなかった。

【図形3】

● 円を，内側にへこみのある円にかえる。(¼がへこんでいる)
● 図形1と2で成り立って，次はへこみのある図形で成り立つかどうか確かめたかったから。

道幅×センターライン(aℓ)

4つのパーツに分解する。

(1) $(2x+a)\times\pi\times\frac{3}{4}$ 直径
$=\frac{3}{2}\pi x+\frac{3}{4}\pi a$

(2) $a\times\pi\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$
$=\frac{1}{2}\pi a$

(3) $(2x-a)\times\pi\times\frac{1}{4}$ 直径
$=\frac{1}{2}\pi x-\frac{1}{4}\pi a$

(1)(2)(3)を全て足すと……
$\frac{3}{2}\pi x+\frac{3}{4}\pi a+\frac{1}{2}\pi a+\frac{1}{2}\pi x-\frac{1}{4}\pi a$
$=\pi a+2\pi x$

これにaをかけると……
$(\pi a+2\pi x)a$
$=\pi a^2+2\pi ax$

面積
(1) $\{(x+a)(x+a)\times\pi-x\times x\times\pi\}\times\frac{3}{4}$　半径　大きい円　小さい円
この(1)(2)(3)は，前のページの図のことです。
$=\{(x^2+2ax+a^2)\pi-x^2\times\pi\}\times\frac{3}{4}$
$=(\pi x^2+2\pi ax+\pi a^2-\pi x^2)\times\frac{3}{4}$
$=(2\pi ax+\pi a^2)\times\frac{3}{4}$
$=\frac{3}{2}\pi ax+\frac{3}{4}\pi a^2$

(2) $a\times a\times\pi\times\frac{1}{2}$ 半円だから
$=a^2\times\pi\times\frac{1}{2}$
$=\frac{1}{2}\pi a^2$

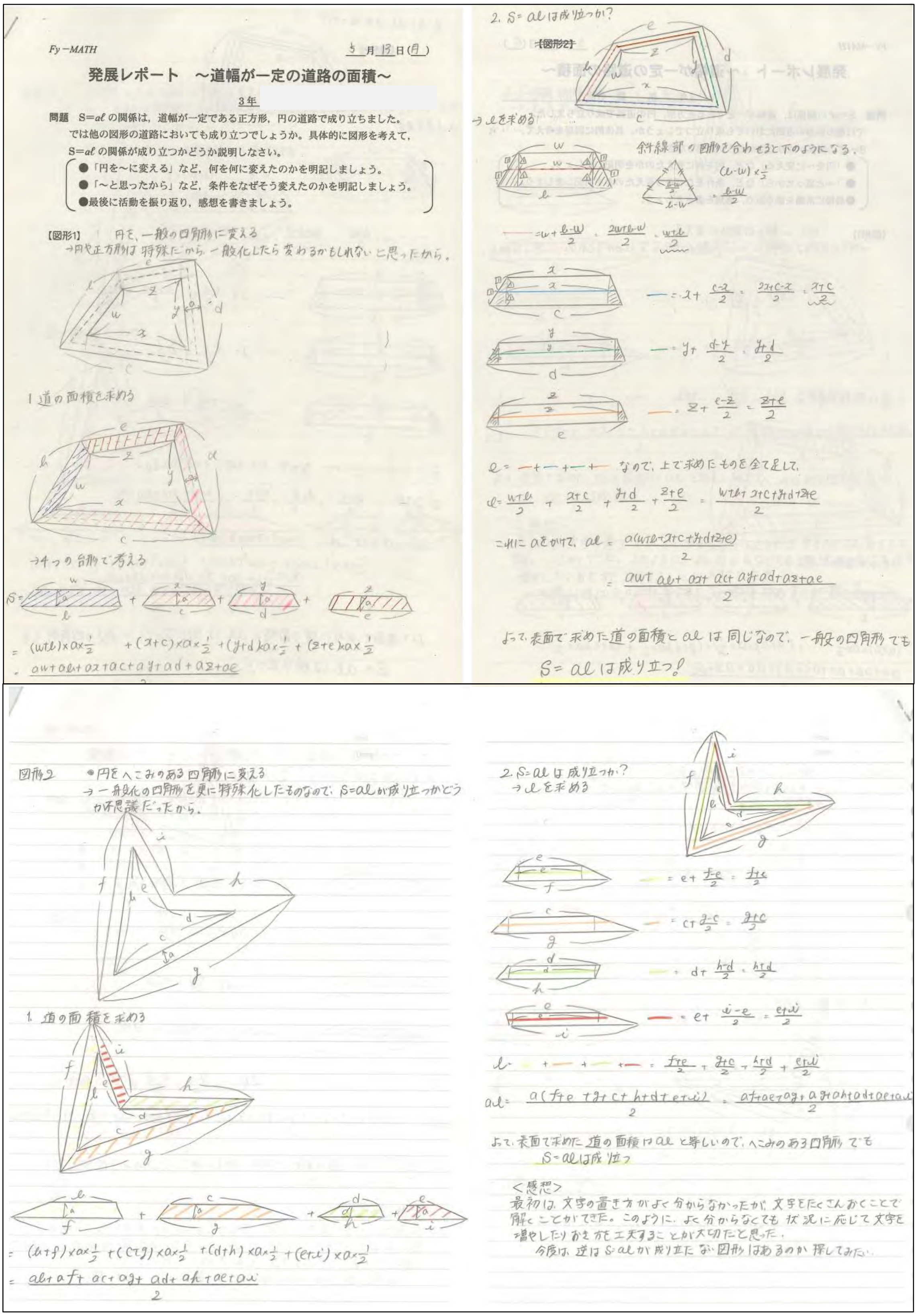
(3) $\{x\times x\times\pi-(x-a)(x-a)\times\pi\}\times\frac{1}{4}$　大きい円　小さい円
$=\{\pi x^2-(x^2-2ax+a^2)\pi\}\times\frac{1}{4}$
$=\{\pi x^2-(\pi x^2-2\pi ax+\pi a^2)\}\times\frac{1}{4}$
$=(\pi x^2-\pi x^2+2\pi ax-\pi a^2)\times\frac{1}{4}$
$=(2\pi ax-\pi a^2)\times\frac{1}{4}$
$=\frac{1}{2}\pi ax-\frac{1}{4}\pi a^2$

(1)(2)(3)全てを足すと……
$\frac{3}{2}\pi ax+\frac{3}{4}\pi a^2+\frac{1}{2}\pi a^2+\frac{1}{2}\pi ax-\frac{1}{4}\pi a^2$
$=\frac{3}{4}\pi a^2+\frac{2}{4}\pi a^2-\frac{1}{4}\pi a^2+\frac{3}{2}\pi ax+\frac{1}{2}\pi ax$
$=\pi a^2+2\pi ax$ ← 面積

このように一致したため，S=aℓは，成り立つといえる。

《感想》1枚目とくらべて，ちょっと楽しかった。説明はなるべく丁寧に書いたつもりだ。キレイな数字になってびっくりした。文字をうまくおけたと思う。

図 38　Fg 生のレポート（長方形，角の丸い正方形，弧を組み合わせた図形）



Fy-MATH 5月13日(月)

発展レポート ～道幅が一定の道路の面積～

3年

問題 $S=a\ell$ の関係は，道幅が一定である正方形，円の道路で成り立ちました。では他の図形の道路においても成り立つでしょうか。具体的に図形を考えて，$S=a\ell$ の関係が成り立つかどうか説明しなさい。

- 「円を～に変える」など，何を何に変えたのかを明記しましょう。
- 「～と思ったから」など，条件をなぜそう変えたのかを明記しましょう。
- 最後に活動を振り返り，感想を書きましょう。

【図形1】 円を、一般の四角形に変える
→円や正方形は特殊だから一般化したら変わるかもしれないと思ったから。

1 道の面積を求める

→4つの台形で考える

$S=(w+\ell)\times a\times\frac{1}{2}+(x+c)\times a\times\frac{1}{2}+(y+d)\times a\times\frac{1}{2}+(z+e)\times a\times\frac{1}{2}$

$=\frac{aw+a\ell+ax+ac+ay+ad+az+ae}{2}$

2. $S=a\ell$ は成り立つか？

→ℓ を求める

斜線部の図形を合わせると下のようになる。

$(\ell-w)\times\frac{1}{2}$

— $=w+\frac{\ell-w}{2}=\frac{2w+\ell-w}{2}=\frac{w+\ell}{2}$

— $=x+\frac{c-x}{2}=\frac{2x+c-x}{2}=\frac{x+c}{2}$

— $=y+\frac{d-y}{2}=\frac{y+d}{2}$

— $=z+\frac{e-z}{2}=\frac{z+e}{2}$

$\ell=$ —+—+—+— なので、上で求めたものを全て足して、

$\ell=\frac{w+\ell}{2}+\frac{x+c}{2}+\frac{y+d}{2}+\frac{z+e}{2}=\frac{w+\ell+x+c+y+d+z+e}{2}$

これにaをかけて、$a\ell=\frac{a(w+\ell+x+c+y+d+z+e)}{2}$

$=\frac{aw+a\ell+ax+ac+ay+ad+az+ae}{2}$

よって、表面で求めた道の面積と $a\ell$ は同じなので、一般の四角形でも

$S=a\ell$ は成り立つ！

図形2 ●円をへこみのある四角形に変える
→一般化の四角形を更に特殊化したものなので、$S=a\ell$ が成り立つかどうか不思議だったから。

1. 道の面積を求める

$=(\ell+f)\times a\times\frac{1}{2}+(c+g)\times a\times\frac{1}{2}+(d+h)\times a\times\frac{1}{2}+(e+i)\times a\times\frac{1}{2}$

$=\frac{a\ell+af+ac+ag+ad+ah+ae+ai}{2}$

2. $S=a\ell$ は成り立つか？
→ℓ を求める

— $=e+\frac{f-e}{2}=\frac{f+e}{2}$

— $=c+\frac{g-c}{2}=\frac{g+c}{2}$

— $=d+\frac{h-d}{2}=\frac{h+d}{2}$

— $=e+\frac{i-e}{2}=\frac{e+i}{2}$

$\ell=$ —+—+—+— $=\frac{f+e}{2}+\frac{g+c}{2}+\frac{h+d}{2}+\frac{e+i}{2}$

$a\ell=\frac{a(f+e+g+c+h+d+e+i)}{2}=\frac{af+ae+ag+ac+ah+ad+ae+ai}{2}$

よって、表面で求めた道の面積は $a\ell$ と等しいので、へこみのある四角形でも

$S=a\ell$ は成り立つ

<感想>

最初は、文字の置き方がよく分からなかったが、文字をたくさんおくことで解くことができた。このように、よく分からなくても状況に応じて文字を増やしたりおき方を工夫することが大切だと思った。

今度は、逆は $S=a\ell$ が成り立たない図形はあるのか探してみたい。

図 39　Ab 生のレポート（一般の四角形，凹四角形）

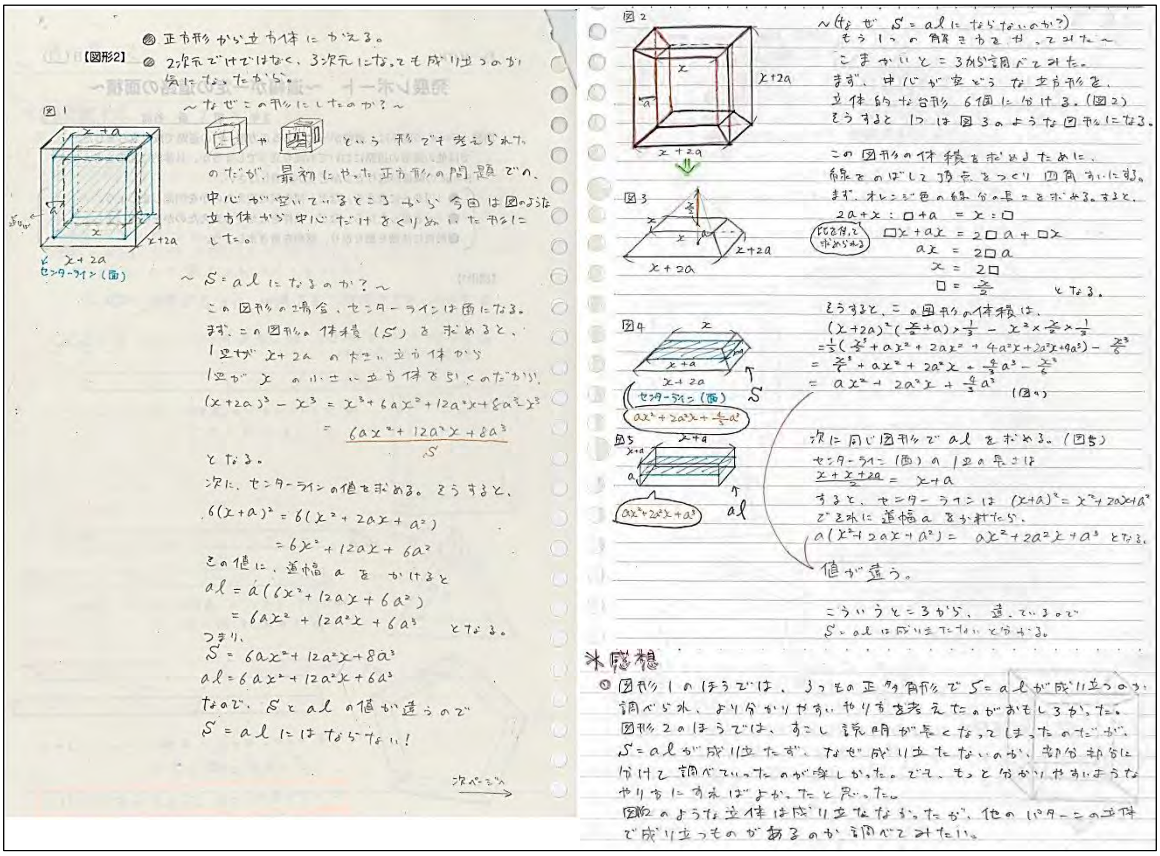


図 40　Ig 生のレポートの一部（立方体（成り立たない理由を記述））

全体として，多様な図形を思い思いにつくり，生徒たちは探究していった。「なぜそう変えようと思ったか」についての記述は，２年生のレポート「広いのはどっち？」や「鳩目返し」のときに比べ，「なんとなく」「気になったから」などの単なる思い付きに近いものはほとんどなくなり，自分なりの問いのもち方をきちんと記述できていた。

中には,台形に分けられれば成り立つことに気付く生徒(例えば Ab 生)や，弧に分けられれば成り立つことに気付く生徒（例えば Fg 生），２次元を３次元に発展させて「(体積)＝(表面積)×(道幅)」立体が成り立つかどうかを確かめる生徒などがいた。センターラインが重複する部分があるときには成り立たないということを見いだす生徒もいた。

教師が評価結果を書いた後は各自に返却し，４人グループでミニ発表会を行った。話し手には「何を何に変えたらどうなったか」「なぜそれを変えようと思ったのか」を発表させるとともに，聞き手には条件の変え方や文字の置き方の工夫に着目して解釈させ，互いのよさを認めることに力点を置いた。授業の最後には，どのような図形で成り立ってどのような図形で成り立たないのかを整理して，その理由を見いだしていた生徒を指名して発表させて終えた。

（３）事例４　３年「Ｄ資料の活用」領域「松坂投手を攻略しよう」

①目標

平成 25 年 7 月に行った本事例の目標は，以下のとおりである。

> 問題を解決するために,標本調査を行い,母集団の傾向をとらえ説明することができる。

この目標を達成するために，レポートの作成及び相互評価を行った。

②問題とその扱い方

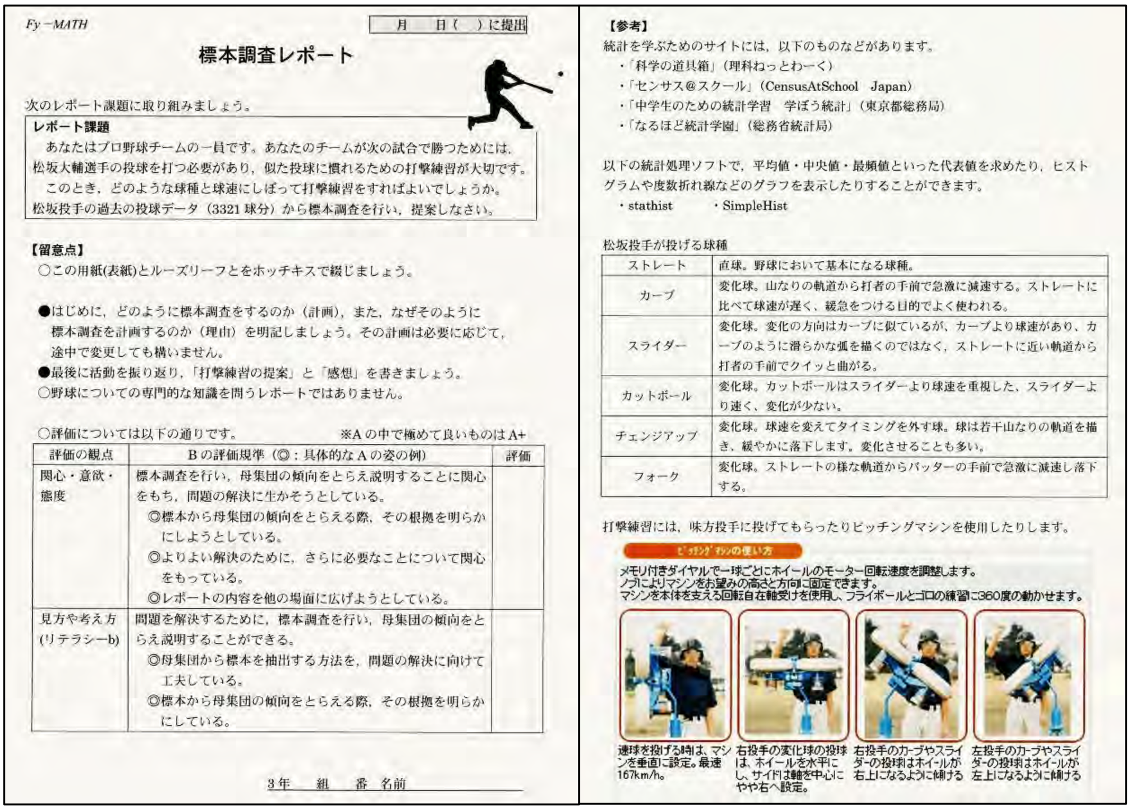
本事例では,まず原題として以下の問題を扱う。(藤原,2014a;藤原,2014b)

> **問題**　あなたはプロ野球チームの一員です。あなたのチームが次の試合で勝つためには,松坂大輔選手の投球を打つ必要があり,似た投球に慣れるための打撃練習が大切です。このとき,どのような球種と球速にしぼって打撃練習をすればよいでしょうか。松坂投手の過去の投球データ(3321 球分　渡辺・神田（2008）)から標本調査を行い,提案しなさい。

「標本調査」単元の学習を 7 月から始め，夏季休業の直前の授業で問題及びデータを配付して，周囲の生徒と話し合って方法の見通しを立てさせた。

③実施の方法，評価規準

問題を提示する際には，具体的に野球部の生徒の名前を挙げ，コーチだっ



Fy－MATH　　月　日（　）に提出

標本調査レポート

次のレポート課題に取り組みましょう。

レポート課題
あなたはプロ野球チームの一員です。あなたのチームが次の試合で勝つためには，松坂大輔選手の投球を打つ必要があり，似た投球に慣れるための打撃練習が大切です。
このとき，どのような球種と球速にしぼって打撃練習をすればよいでしょうか。
松坂投手の過去の投球データ（3321 球分）から標本調査を行い，提案しなさい。

【留意点】
○この用紙(表紙)とルーズリーフとをホッチキスで綴じましょう。

●はじめに，どのように標本調査をするのか（計画），また，なぜそのように標本調査を計画するのか（理由）を明記しましょう。その計画は必要に応じて，途中で変更しても構いません。
●最後に活動を振り返り，「打撃練習の提案」と「感想」を書きましょう。
○野球についての専門的な知識を問うレポートではありません。

○評価については以下の通りです。　※A の中で極めて良いものは A+

評価の観点	B の評価規準（◎：具体的な A の姿の例）	評価
関心・意欲・態度	標本調査を行い，母集団の傾向をとらえ説明することに関心をもち，問題の解決に生かそうとしている。 ◎標本から母集団の傾向をとらえる際，その根拠を明らかにしようとしている。 ◎よりよい解決のために，さらに必要なことについて関心をもっている。 ◎レポートの内容を他の場面に広げようとしている。	
見方や考え方(リテラシーb)	問題を解決するために，標本調査を行い，母集団の傾向をとらえ説明することができる。 ◎母集団から標本を抽出する方法を，問題の解決に向けて工夫している。 ◎標本から母集団の傾向をとらえる際，その根拠を明らかにしている。	

3年　組　番　名前

【参考】
統計を学ぶためのサイトには，以下のものなどがあります。
・「科学の道具箱」（理科ねっとわーく）
・「センサス@スクール」（CensusAtSchool　Japan）
・「中学生のための統計学習　学ぼう統計」（東京都総務局）
・「なるほど統計学園」（総務省統計局）

以下の統計処理ソフトで，平均値・中央値・最頻値といった代表値を求めたり，ヒストグラムや度数折れ線などのグラフを表示したりすることができます。
・stathist　・SimpleHist

松坂投手が投げる球種

ストレート	直球。野球において基本になる球種。
カーブ	変化球。山なりの軌道から打者の手前で急激に減速する。ストレートに比べて球速が遅く、緩急をつける目的でよく使われる。
スライダー	変化球。変化の方向はカーブに似ているが、カーブより球速があり、カーブのように滑らかな弧を描くのではなく，ストレートに近い軌道から打者の手前でクイッと曲がる。
カットボール	変化球。カットボールはスライダーより球速を重視した、スライダーより速く、変化が少ない。
チェンジアップ	変化球。球速を変えてタイミングを外す球。球は若干山なりの軌道を描き、緩やかに落下します。変化させることも多い。
フォーク	変化球。ストレートの様な軌道からバッターの手前で急激に減速し落下する。

打撃練習には，味方投手に投げてもらったりピッチングマシンを使用したりします。

図 41　レポートの表紙（表と裏）

たらどのような練習をするか，というやりとりから問題のイメージを膨らませ，過去の投球データから打撃練習を提案するという活動の趣旨を理解させた。

レポート作成にあたっては，安易に標本の抽出方法を選ばないように，「どのように標本調査をするのか（計画），なぜその標本調査の計画を立てたのか（理由）」を明記させるようにした。なお，その計画は途中で変更してよいものとしている。また，「打撃練習の提案」と感想を書かせるようにした。

また，中１での統計の学習内容に不安がある生徒や，野球に詳しくない生徒もいるので，表紙の裏面には補足的な情報を掲載した（図 41）。

評価については，図 41 のとおりである。

なお，本事例は，「標本調査」単元の導入「東京オリンピックの国内支持率」の授業から始まった一連の流れを，単元末のレポートに生かすように計画を組んで実施した。詳しくは藤原（2014a；藤原 2014c）を参考されたい。

④生徒の活動とその考察

（ｉ）標本の抽出方法の計画

Nm 生は母集団から第１～２時の「東京オリンピックの国内支持率」の学習を生かして，母集団から無作為に抽出し，球種や球速の傾向を出そうと計画している（図 42）。偏りなく投球データを分析しようとしていることが窺える。

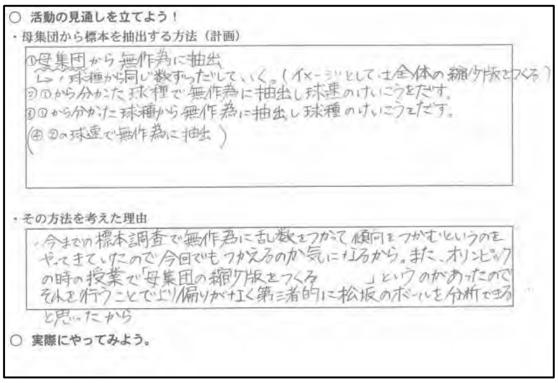


図 42　Nm 生が立てた計画

また，Sg 生は母集団を各球種に分けた上で，標本の大きさを 15 にして無作為抽出しようと計画している（図 43）。標本平均を出すだけでなく，ヒストグラムの観点からも検討しようとしていること，標本誤差が大きくならない程度に標本の大きさを小さくすることを検討しようとしていることが窺える。

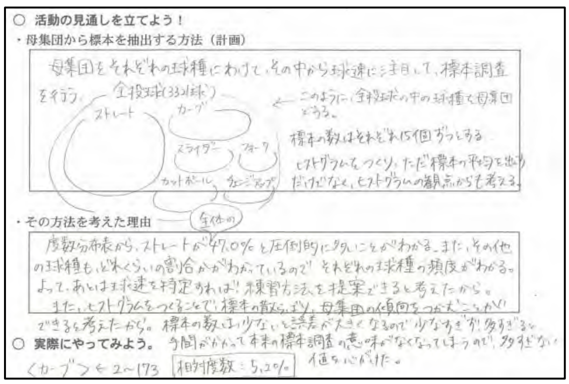


図 43　Sg 生が立てた計画

夏季休業の直前の授業では，代表値として何を用いればよいかについて話合う様子が３箇所で見られた。筆者は机間指導においてプリントの端にヒストグラムを書いて，平均値と中央値と最頻値の意味を確認させた。また，授業ではまだ計画が書けていない生徒が３名いたが，机間指導で計画を尋ね

ると，口頭では答えられていたのでそのことを書くように伝えた。生徒が提出したレポートにはどれも自分なりの計画が記述されており，その後の活動との整合がとれていたことから，目的意識をもって活動できていたと解釈できる。

（ⅱ）一連の統計的問題解決

Nm 生のレポートは，球種で層別し，それぞれの代表値やヒストグラムから特定の球速にしぼって打撃練習の提案をしており，他の生徒にも多かった代表的な考えで進めている。

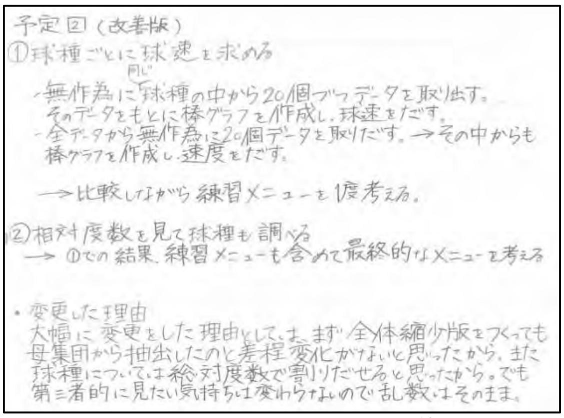


図 44　Nm 生の計画の改善版

Nm 生はまず，最初の計画（図 42）から「改善版」（図 44　ヒストグラムを「棒グラフ」と誤表現している）の計画を立て，球種による層化無作為抽出を行っている。標本の大きさは球種ごとに比例配分せず，母集団の大きさに関係なく 20 球としている。その上で図 45，46 のように平均値，中央値，最頻値を出している。その際，標本と全数調査（「全体」と記述）とでヒストグラムの形の違いを比較・検討している。

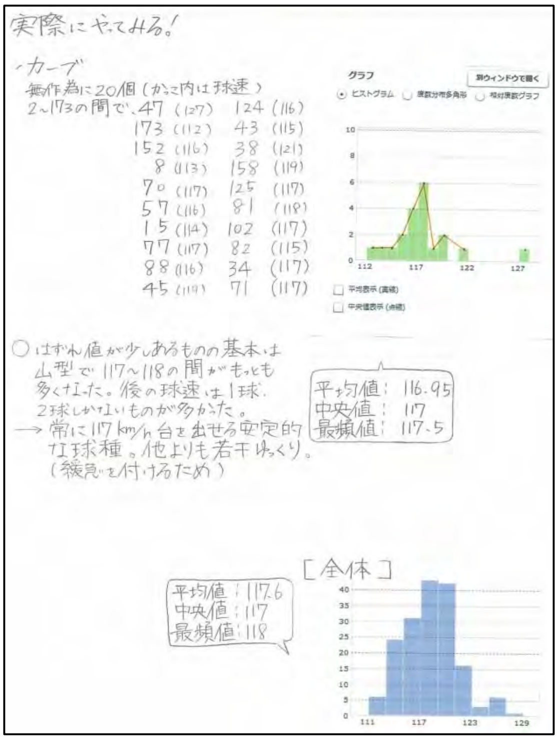


図 45　Nm 生のレポートの p. 3

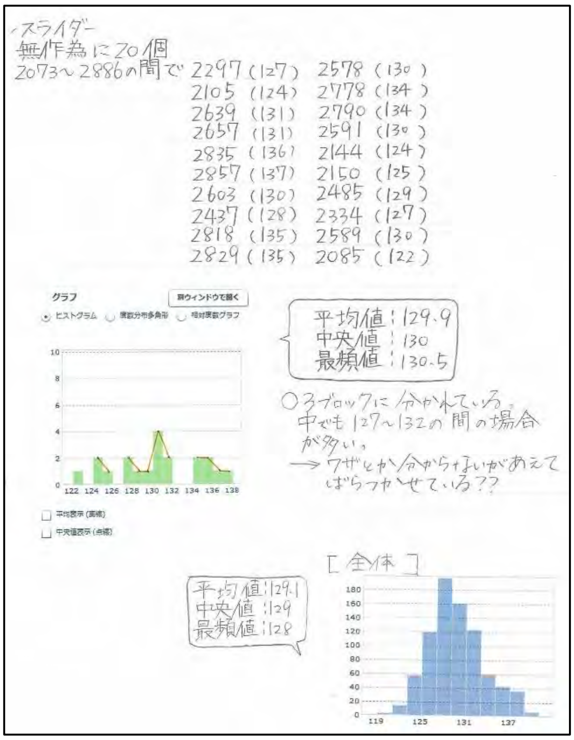
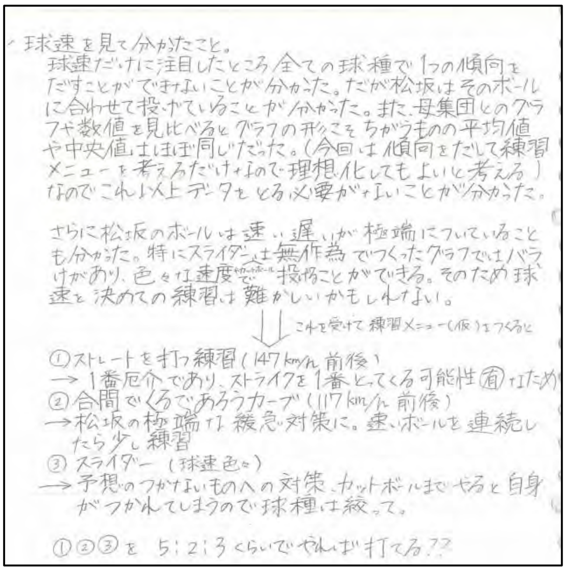


図 46　Nm 生のレポートの p. 7

これらのことから，図 28 では「全ての球速で（それぞれ）1 つの傾向をだすことができない」としながらも，全数調査と標本調査とで「グラフの形こ

そ違うものの平均値と中央値はほぼ同じだった」ことから「理想化」して標本の大きさ 20 を正当化し，打撃練習を考えている。また，図 46 の分析から図 47 では，スライダーについては球速の「バラケ」が大きいため「球速を決めての練習は難しいかもしれない」とするなど，分布の様子についても考慮している。さらに，図 48 で球種の割合の検討を加え，打撃練習を提案している。相対度数に着目しているものの，用語「確率」は用いていない。



・球速を見て分かったこと。
球速だけに注目したところ全ての球種で1つの傾向をだすことができないことが分かった。だが松坂はそのボールに合わせて投げていることが分かった。また、母集団とのグラフや数値を見比べるとグラフの形こそちがうものの平均値や中央値はほぼ同じだった。(今回は傾向をだして練習メニューを考えるだけなので理想化してもよいと考える)なのでこれ以上データをとる必要がないことが分かった。

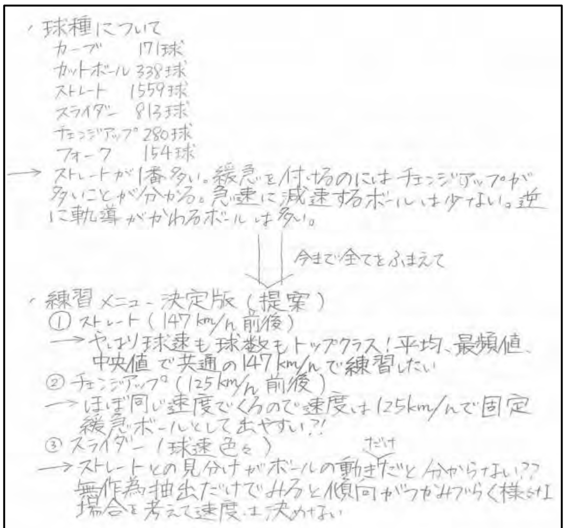
さらに松坂のボールは速い遅いが極端についていることも分かった。特にスライダーは無作為でつくったグラフではバラけがあり、色々な速度で投げることができる。そのため球速を決めての練習は難しいかもしれない。

これを受けて練習メニュー(仮)をつくると

①ストレートを打つ練習(147km/h前後)
→1番厄介であり、ストライクを1番とってくる可能性有なため
②合間でくるであろうカーブ(117km/h前後)
→松坂の極端な緩急対策に。速いボールを連続したら少し練習
③スライダー(球速色々)
→予想のつかないものへの対策。カットボールまでやると自身がつかれてしまうので球種は絞って。

①②③を 5:2:3くらいでやれば打てる??

図 47　Nm 生のレポートの p.９



・球種について
カーブ 171球
カットボール 338球
ストレート 1559球
スライダー 813球
チェンジアップ 280球
フォーク 154球
→ストレートが1番多い。緩急を付けるのにはチェンジアップが多いことが分かる。急速に減速するボールは少ない。逆に軌道がかわるボールは多い。

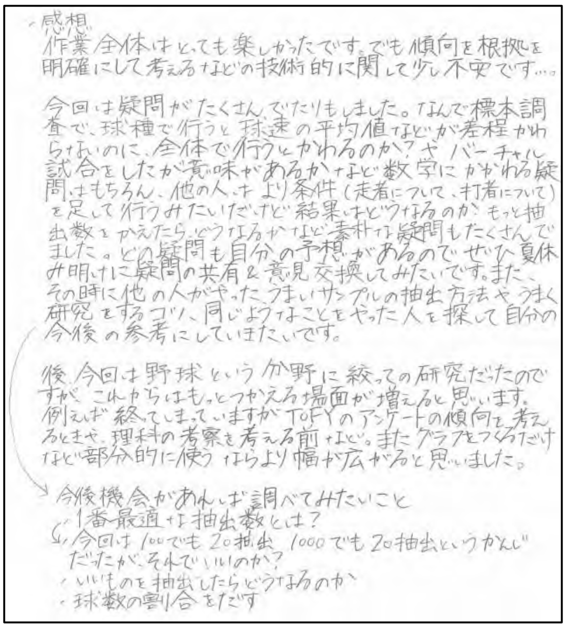
今まで全てをふまえて

・練習メニュー決定版(提案)
①ストレート(147km/h前後)
→やはり球速も球数もトップクラス！平均、最頻値、中央値で共通の147km/hで練習したい
②チェンジアップ(125km/h前後)
→ほぼ同じ速度でくるので速度は125km/hで固定緩急ボールとして出やすい?!
③スライダー(球速色々)
→ストレートとの見分けがボールの動きだけだと分からない??無作為抽出だけでみると傾向がつかみづらく様々な場合を考えて速度は決めない

図 48　Nm 生のレポートの p.10

図 49 の感想では，「とっても楽しかった」一方で「傾向を根拠を明確にして考えるなどの技術的に関して少し不安」としている。不確定な事象において自分なりの結論を出す場面のため,やむを得ない部分もある。

Nm 生のレポートを評価規準に即して評価すると，球種ごとの層化無作為抽出をしつつ，標本の大きさの妥当性を検討している点から，Ａ１を達成していると判断できる。また，最頻値への着目がやや足りないと感じられるものの，代表値やヒストグラムなど複数の視点で根拠を明確に示しながら説明している。



・感想
作業全体はとても楽しかったです。でも傾向を根拠を明確にして考えるなどの技術的に関して少し不安です…。

今回は疑問がたくさんでたりもしました。なんで標本調査で、球種で行うと球速の平均値などが差程かわらないのに、全体で行うとかわるのか?や バーチャル試合をしたが意味があるかなど数学にかかわる疑問はもちろん、他の人はより条件(走者について、打者について)を足して行うみたいだけど結果はどうなるのか もっと抽出数をかえたらどうなるかなど素朴な疑問もたくさんでました。どの疑問も自分の予想があるのでぜひ夏休み明けに疑問の共有＆意見交換してみたいです。また、その時に他の人がやったうまいサンプルの抽出方法やうまく研究をするコツ、同じようなことをやった人を探して自分の今後の参考にしていきたいです。

後、今回は野球という分野に絞っての研究だったのですが、これからはもっとつかえる場面が増えると思います。例えば終ってしまっていますがTOFYのアンケートの傾向を考えるときや、理科の考察を考える前など。またグラフをつくるだけなど部分的に使うならより幅が広がると思いました。

今後機会があれば調べてみたいこと
・1番最適な抽出数とは?
→今回は100でも20抽出 1000でも20抽出というかんじだったが、それでいいのか?
・いいものを抽出したらどうなるのか
・球数の割合をだす

図 49　Nm 生のレポートの p.12

なお，図 49 の感想からは，走者や打者など現実的な条件を加味すると結果がどう変わるか，他教科等でこの学習がどう生かせるか，適切な標本の大きさはどれくらいかなど，新たなサイクルに向けた意欲が解釈できる。

（iii）結論と振り返り

Ed 生は，各球種の標本比率から母比率を推定し，図 50 の円グラフで表した後，Nm 生と同様に層化無作為抽出し，標本比率から打撃練習の 100 本を比例配分して球速の最頻値を基に提案している（図 51）。

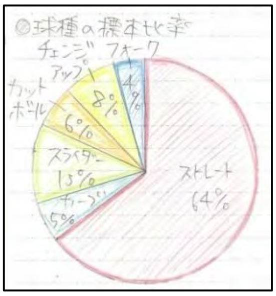
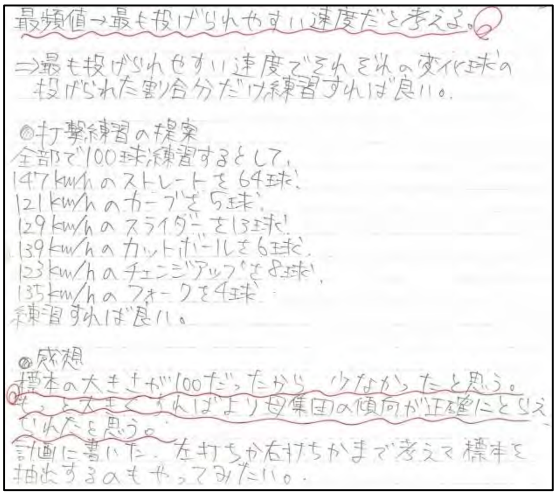


図 50　円グラフ



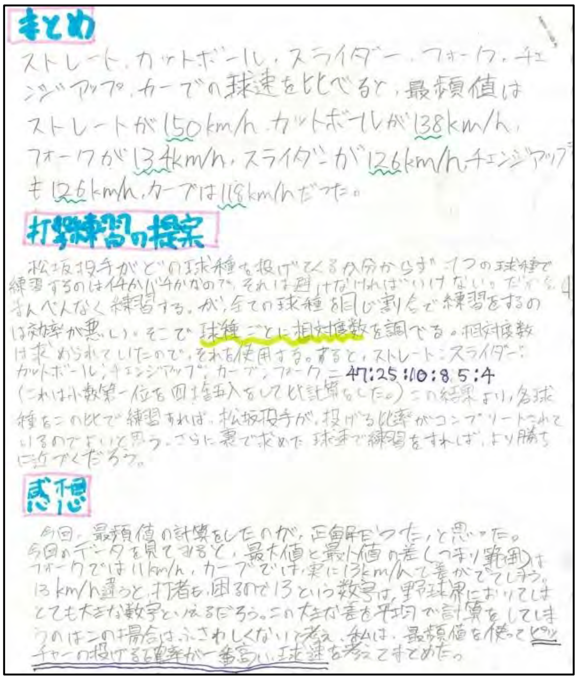
最頻値→最も投げられやすい速度だと考える。
⇒最も投げられやすい速度でそれぞれの変化球の投げられた割合分だけ練習すれば良い。

◎打撃練習の提案
全部で100球練習するとして，
147km/hのストレートを64球，
121km/hのカーブを5球，
129km/hのスライダーを13球，
139km/hのカットボールを6球，
123km/hのチェンジアップを8球，
135km/hのフォークを4球
練習すれば良い。

◎感想
標本の大きさが100だったから少なかったと思う。もっと大きくすればより母集団の傾向が正確にとらえられたと思う。
計画に書いた，左打ちか右打ちかまで考えて標本を抽出するのもやってみたい。

図 51　Ed 生のレポート p. 4

Ss 生は図 52 のように，根拠とする代表値を検討し「最頻値を使ってピッチャーが投げる確率の高い球速」を調べて打撃練習を考えた。Ed 生や Ss 生のように最頻値のみを代表値として採用した生徒は約半数で，他は平均値のみ，あるいは明確な理由の記述はないが Nm 生と同様に複数の代表値を用いていた。

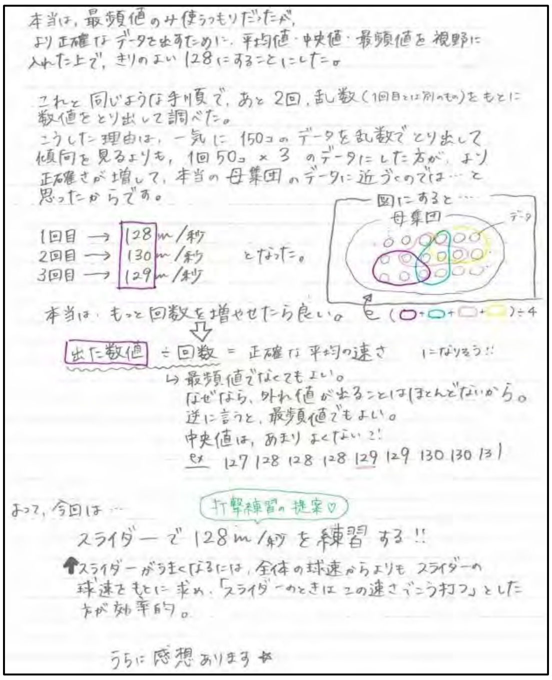


まとめ
ストレート，カットボール，スライダー，フォーク，チェンジアップ，カーブでの球速を比べると，最頻値はストレートが150km/h，カットボールが138km/h，フォークが134km/h，スライダーが126km/h，チェンジアップも126km/h，カーブでは118km/hだった。

打撃練習の提案
松坂投手がどの球種を投げてくるか分からず一つの球種で練習するのは何か山かなので，それは避けなければいけない。だから，まんべんなく練習する。が，全ての球種を同じ割合で練習をするのは効率が悪い。そこで球種ごとに相対度数を調べる。相対度数は求められていたので，それを使用する。すると，ストレート：スライダー：カットボール：チェンジアップ：カーブ：フォーク＝47：25：10：8：5：4
（これは小数第一位を四捨五入をして比計算をした。）この結果より，各球種をこの比で練習すれば，松坂投手が投げる比率がコンプリートされているのでよいと思う。さらに裏で求めた球速で練習をすれば，より勝ちに近づくだろう。

感想
今回，最頻値の計算をしたのが，正解だった，と思った。今回のデータを見てみると，最大値と最小値の差（つまり範囲）はフォークでは11km/h，カーブでは実に13km/hで差がでてしまう。13km/h違うと，打者も困るので13という数字は，野球界においてはとても大きな数字といえるだろう。この大きな差を平均で計算をしてしまうのはこの場合はふさわしくないと考え，私は，最頻値を使ってピッチャーの投げる確率が一番高い球速を考えてまとめた。

図 52　Ss 生のレポート p. 4



本当は，最頻値のみ使うつもりだったが，
より正確なデータを出すために，平均値・中央値・最頻値を視野に入れた上で，きりのよい128にすることにした。

これと同じような手順で，あと2回，乱数（1回目とは別のもの）をもとに数値をとり出して調べた。
こうした理由は，一気に150コのデータを乱数でとり出して傾向を見るよりも，1回50コ × 3 のデータにした方が，より正確さが増して，本当の母集団のデータに近づくのでは…と思ったからです。

図にすると…
母集団
データ

1回目 → 128m/秒
2回目 → 130m/秒　となった。
3回目 → 129m/秒

本当は，もっと回数を増やせたら良い。

出た数値 ÷ 回数 ＝ 正確な平均の速さ　になりそう!!
↳ 最頻値でなくてもよい。
なぜなら，外れ値が出ることはほとんどないから。
逆に言うと，最頻値でもよい。
中央値は，あまりよくないっ!
ex　127 128 128 128 129 129 130 130 131

よって，今回は…　打撃練習の提案♡
スライダーで128m/秒を練習する!!
スライダーがうまくなるには，全体の球速からよりもスライダーの球速をもとに求め，「スライダーのときはこの速さでこう打つ」とした方が効率的。

うらに感想あります☆

図 53　Iw 生のレポート p. 3

Iw 生は，投げる確率が比較的高いスライダーに球種を絞り，図 53 のようにその投球データを母集団として無作為抽出を 3 回行い，各最頻値の平均を基に打撃練習を提案している。

７．研究のまとめ

（１）研究の成果

本研究の目的は，以下のとおりであった。

中学校数学科で数学的な思考力・表現力及び自律的活動力を育成することに向けて，レポート作成による指導と評価の留意点を明らかにすること。

生徒の数学的活動において教師が生徒の見通しと振り返りを促すことで，探究的な学習のサイクルが主体的に進展され，生徒の数学的な思考・表現が繰り返されていく。その過程や成果を記述し，振り返り可能な形で記録していく対象が，レポートである。

このレポート作成による指導と評価によって，数学的な思考力・表現力を生徒が自律的に身に付けさせていく上で，以下の６つの留意点が有効であることが，生徒の記述やアンケート調査の結果からわかった。

［留意点Ⅰ］	数学的な思考・表現の動機付けやよさの実感が得られるように，数学的な発展性や現実性を含む問題・教材を扱う。**〔扱う問題・教材〕**
［留意点Ⅱ］	発展的に考えた成果をレポートに記述できるように，基になる授業で思考した過程や結果を可視化あるいは言語化して記録することを，数学的活動を通して予め指導しておく。**〔実施の方法〕**
［留意点Ⅲ］	その後の活動を目的的で有意味なものとして進められるように，解決に向けて「どう計画したのか」「なぜその計画にしようと思ったのか」といった着想や動機を記述させる。**〔実施の方法〕**
［留意点Ⅳ］	生徒がレポートの作成前にどのような活動が期待されているかを生徒が見通せるように，評価の観点と評価規準を予め生徒と共有しておく。**〔学習評価〕**
［留意点Ⅴ］	生徒がレポートの提出後に評価を受け取ったとき，なぜその評価結果なのかを理解できるように，「十分満足できる」状況（Ａ）であるかどうかを判定するための視点を例示しておき，そこに○印等をつけることで教師の採点とする。**〔学習評価〕**
［留意点Ⅵ］	生徒がよりよい思考や表現に気付くように，ねらいや留意点を明示した上で小グループ等でレポートを発表，相互評価させ，自分のレポートを可能な範囲で改善させる。**〔成果の共有〕**

このような探究的な数学的活動を生徒が経験し，自己効力感を醸成していくことで，自立的活動力を育成することにつながっていくと考えられる。

（２） 今後の課題

本研究の課題として，以下の２つを挙げておく。

① 今回明らかとなった留意点の効果を，一般の中学校で検証すること。

② 数学的な思考力･表現力及び自律的活動力の育成に有効な教材を開発して実践し，その価値を検証すること

③ 共同的にレポートを作成する実践について検討すること

[参考・引用文献]

池田敏和・山崎浩二（1993)「数学的モデリングの導入段階における目標とその授業 のあり方に関する研究」，日本数学教育学会誌第 75 巻第１号，pp.26-32.

熊本大学教育学部附属中学校数学科（2011)『数学レポート実践集―思考力・表現力がぐんぐん伸びる!』，明治図書.

国立教育政策研究所（2013)「教育課程の編成に関する基礎的研究　報告書５　社会の変化に対応する資質や能力を育成する教育課程編成の基本原理」.

佐藤真(2014)「各教科等での「見通し・振り返り」学習活動の充実」，文部科学省『初等教育資料４月号』，東洋館出版社，pp.６－９.

自己調整学習研究会（2012)『自己調整学習　理論と実践の新たな展開へ』，北大路書房.

澤田利夫・坂井裕（1995)『中学校 数学科〔課題学習〕問題づくりの授業』，東洋館出版社，pp.11-14.

島田茂（1990)『教師のための問題集』，共立出版.

鈴木明裕（2012)「『事実・手続き』『根拠』『着想』の３つの柱をもとに考えることの提案」，日本数学教育学会誌第 94 巻第７号，pp.19-22.

竹内芳男・澤田利男(1984)『問題から問題へ』，東洋館出版社.

中央教育審議会（2008)「幼稚園，小学校，中学校，高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善について（答申)」.

根本博（2014)『数学教育と人間の教育　‘振り返る’活動を考える』，啓林館，p.293.

藤原大樹（2009)「文字を用いるよさを実感できる「式の利用」の授業－自由記述式プリントを用いた問題づくりとミニ・プレゼン」,『教育科学 数学教育８月号　No.622』，pp.32-37.

藤原大樹（2010)「数学と社会のつながり」,『教育科学 数学教育５月号 No.631』，pp.79-81.

藤原大樹(2011a)「第 93 回算数・数学教育研究(神奈川)大会公開授業　Ruler Catch～反応時間～」，日本数学教育学会誌第 93 巻(臨時増刊)，pp.252-253.
藤原大樹（2011b)「数学科　実践例③」，横浜国立大学教育人間科学部附属横浜中学校『思考力・判断力・表現力等を育成する指導と評価』，学事出版，p.53.
藤原大樹（2012a)「時間がない！を解消する効率的な教材研究の仕方」，『教育科学　数学教育１月号　No.651』，pp.4-6.
藤原大樹（2012b)「数学的モデリングの初期指導における言語活動」，日本数学教育学会誌第 94 号第７号，pp.2-5.
藤原大樹（2012c)「中１「資料の散らばりと代表値」における「活用」に向けた「習得」の授業の在り方」，統計数理研究所（2012)「統計数理研究所共同研究リポート 272　統計教育実践研究第４巻」，pp.98-103.
藤原大樹（2012d)「統計的思考力の育成を目指した単元指導と評価」，日本数学教育学会誌第 94 巻(臨時増刊)，p.348.
藤原大樹（2013a)「図形の性質を見いだし発展させる事例」，横浜国立大学教育人間科学部附属横浜中学校『思考力・判断力・表現力等を育成する指導と評価Ⅲ　新たなる学びへの意欲を生む授業事例集』，学事出版，pp.44-47.
藤原大樹（2013b)「層別によるレポートの改善を通した「資料の傾向をとらえ説明すること」の学習評価」，日本科学教育学会年会論文集 Vol.37，pp.124-127.
藤原大樹（2013c)「７　生徒と先生の反応時間を比較しよう」，椚元新一郎（編)『中学校数学科　統計指導を極める』，pp.110-114.
藤原大樹（2013d)「プロセス重視の学習指導案」，横浜国立大学教育人間科学部附属横浜中学校『思考力・判断力・表現力等を育成する指導と評価Ⅲ　新たなる学びへの意欲を生む授業事例集』，学事出版，pp.15-18.
藤原大樹(2014a)「統計的思考力の育成を目指した単元指導と評価(5)　～中学校３年間のとしての「標本調査」単元の在り方～」，日本数学教育学会誌臨時増刊第 96 回大会特集号，p.277.
藤原大樹（2014b)「標本調査を用いて母集団の傾向をとらえ説明する事例・３年生」，横浜国立大学教育人間科学部附属横浜中学校『思考力・判断力・表現力等を育成する指導と評価Ⅳ　言語活動を通して学習意欲を高める授業事例集』，学事出版，pp.66-67.

藤原大樹（2014c)「中学校数学科における統計的思考力の育成を目指した指導～中３「標本調査」単元を中心に～」，横浜国立大学教育人間科学部附属横浜中学校個人研究論文集第８号.
藤原大樹（2015)「連載　授業ライブ言語活動 11　『図形』領域の授業　課題を探究すること」,『教育科学　数学教育２月号』,明治図書,pp.110-112.
松下佳代(2007)『パフォーマンス評価－子どもの思考と表現を評価する－』,日本標準.
文部科学省(2008a)「中学校学習指導要領」.
文部科学省(2008b)「中学校学習指導要領解説　数学編」
文部科学省(2008c)「中学校学習指導要領解説　総合的な学習の時間編」.
文部科学省初等中等教育局教育課程課（2014)「『見通す・振り返る』学習活動の重視とその意義」，文部科学省『初等教育資料４月号』，東洋館出版社，pp.1-5.
横浜国立大学・神奈川県教育委員会（2007)「中・高・大連携によるこれからの教育実践モデル　実施計画」.
横浜国立大学教育人間科学部附属横浜中学校（2012)『思考力・判断力・表現力等を育成する指導と評価Ⅱ　言語活動の質を高める授業事例集』,学事出版.
横浜国立大学教育人間科学部附属横浜中学校（2014)『思考力・判断力・表現力等を育成する指導と評価Ⅳ　言語活動を通して学習意欲を高める授業事例集』，学事出版.
横浜国立大学教育人間科学部附属横浜中学校（2015a)『思考力・判断力・表現力等を育成する指導と評価Ⅴ　「見通す・振り返る」学習活動を重視した授業事例集』，学事出版.
横浜国立大学教育人間科学部附属横浜中学校(2015b)「平成 26 年度横浜国立大学教育人間科学部附属横浜中学校研究発表会基調提案資料」.
Wild, C.J. & Pfannkuch, M. (1999), *Statistical Thinking in Empirical Enquiry. in International Statistical Review*, 67(3).

［参考資料］　興味深いレポート

Fy－MATH

発展レポート　～道幅が一定の道路の面積～　評価票

問題　$S=a\ell$ の関係は，道幅が一定である正方形，円の道路で成り立ちました。
では他の図形の道路においても成り立つでしょうか。具体的に図形を考えて，
$S=a\ell$ の関係が成り立つかどうか説明しなさい。

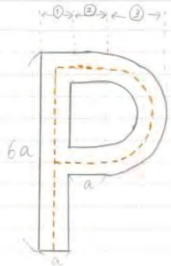
- 「円を～に変える」など，何を何に変えたのかを明記しましょう。
- 「～と思ったから」など，条件をなぜそう変えたのかを明記しましょう。
- 最後に活動を振り返り，感想を書きましょう。

5/30（金）提出

○評価については以下の通りです。　※A の中で極めて良いものは A+

評価の観点	B の評価規準（◎：具体的な A の姿の例）	評価
関心・意欲・態度	条件を一部変えたときに証明やその結論がどのように変わるかに関心をもち，命題が成り立つことを文字式を用いて説明しようとしている。 ◎ 発展的に考えるよさを感じている。 ◎ 探究の過程をわかりやすく説明しようとしている。	A+
見方や考え方（リテラシーa）	文字を用いて表現したり，目的に応じて式を変形したり，その意味を読み取ったりして，命題が成り立つことを説明することができる。 ◎ もとの問題を含め，複数の問題を統合的に見ている。 ◎ つくった問題の構造を見極めている。 ◎ 条件の変え方を工夫して本質に迫っている。	A+

3年



円をアルファベットのPに変える
→ 授業で円と正方形の証明をしたときと同じ手順でとくことができるのではないか，と考えたから。

なるほど！

＊面積

① → $6a \times a = 6a^2$

② → $a \times a \times 2 = 2a^2$

③ → $2a \times 2a \times \pi \times \frac{1}{2} - a \times a \times \pi \times \frac{1}{2} = \frac{4\pi a^2}{2} - \frac{\pi a^2}{2} = \frac{3\pi a^2}{2}$

$4a^2 \times \pi \times \frac{1}{2}$　$2a^2\pi$　$a^2\pi \times \frac{1}{2}$　$\frac{\pi a^2}{2}$

$S = 8a^2 + \frac{3\pi a^2}{2}$

＊センターライン

$6a + \frac{a}{2} + a + a + \left(\frac{a}{2} + a \times 2 \times \pi \times \frac{1}{2}\right)$

$= 6a + \frac{a}{2} + 2a + (a + 2a \times \pi \times \frac{1}{2})$

$= 6a + \frac{a}{2} + 2a + 2\pi a$

$\ell = 8a + \frac{a}{2} + 2\pi a$

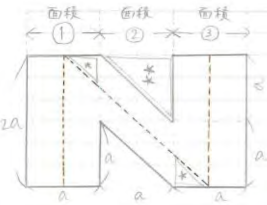
ℓ に a をかける。→ $a \times (8a + \frac{a}{2} + 2\pi a)$

$a\ell = 8a^2 + \frac{a^2}{2} + 2\pi a^2$

$S = 8a^2 + \frac{3\pi a^2}{2}$ だから $S = a\ell$ は成り立たない！

OK!

で，なぜだと思いますか？？



円をアルファベットのNに変える
→ 1つ前でPをやってみて成り立たなかったことからもう1度授業で成り立った正方形と円を見て，2つとも点対称であることに気が付いたため，点対称であるNの図形にした。

ほほう…。

振り返ってみたのですね！

＊面積

① → $2a \times a = 2a^2$

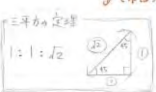
② → 四角形から上と下の三角形をひく。

$2a^2 - (a \times a) = 2a^2 - a^2 = a^2$

③ → ①と同じく $2a \times a = 2a^2$

①＋②＋③より　$S = 5a^2$

おお！（未習）



＊センターライン

------ 右と左両方にあるから　$2a \times 2 = 4a$

------ ＊で底辺が $\frac{a}{2}$（平行四辺形の辺が a でその半分）。同じく高さも $\frac{a}{2}$（面積①の横の辺は a でその半分）で直角三角形だから三平方の定理（右図）を利用すると，$\frac{a}{2} : \frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{2}}{2}$ になる。（斜辺の長さ）
右と左両方にあるから　$\frac{a\sqrt{2}}{2} \times 2 = a\sqrt{2}$

------ ＊＊で底辺が a，高さも a だから同じように三平方の定理を利用すると，$a : a : a\sqrt{2}$ になる。よって斜辺の長さは $a\sqrt{2}$。平行四辺形は，向かい合う辺が平行だからセンターラインも同じく $a\sqrt{2}$。

------＋------＋------ より　$\ell = 4a + 2a\sqrt{a}$

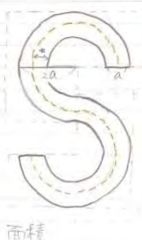
ℓ に a をかけると，$a \times (4a + 2a\sqrt{a})$

$a\ell = 4a^2 + 2a^2\sqrt{a}$

$S = 5a^2$ だから $S = a\ell$ は成り立たない！

OK!

なぜだろう…？？？



円をアルファベットのSに変える
→ 1つ前で点対称であるNをやってみて成り立たなかったけれど，もう1度点対称であるSをやってみて，違いなどあったら発見したいから。

＊面積

点線で囲まれている図形を $\frac{3}{4}$ の円だとすると

半径 $2a$ の円の $\frac{3}{4}$ → $2a \times 2a \times \pi \times \frac{3}{4} = 3\pi a^2$

その内側にある円は，$a \times a \times \pi \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\pi a^2$

$3\pi a^2 - \frac{3}{4}\pi a^2 = \frac{12}{4}\pi a^2 - \frac{3}{4}\pi a^2 = \frac{9}{4}\pi a^2$

$\frac{9}{4}\pi a^2$ は上と下でくっついているから $\frac{9}{4}\pi a^2 \times 2 = \frac{9\pi a^2}{2}$　　$S = \frac{9\pi a^2}{2}$

＊センターライン

オレンジの点線を $\frac{3}{4}$ 円とすると ＊ は道幅の半分（$\frac{a}{2}$）だから

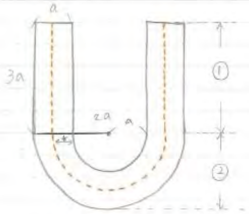
$(\frac{a}{2} + a) \times 2 \times \pi \times \frac{3}{4} = (a + 2a) \times \pi \times \frac{3}{4} = \frac{9\pi a}{4}$

$\frac{3}{4}$ の円は上と下でくっついているから $\frac{9\pi a}{4} \times 2 = \frac{9\pi a}{2}$　　$\ell = \frac{9\pi a}{2}$

ℓ に a をかけると　$\frac{9\pi a}{2} \times a = \frac{9\pi a^2}{2} = a\ell$

$S = \frac{9\pi a^2}{2}$ だから $S = a\ell$ は成り立つ！

OK!



円をアルファベットのUに変える
→ 1つ前でアルファベットのSをやってみて点対称のNはS=alが成り立たなかったのに同じ点対称でもSはS=alが成り立った。そこで、アルファベットの線対称でも同じような結果になるのか疑問に思い、線対称のUの図形にした。

＊面積

①→ $3a \times a$が2つあるから $3a^2 \times 2 = 6a^2$

②→ ―が2aだから半径は2a.

大きい円は $2a \times 2a \times \pi = 4\pi a^2$ → 半分だから $2\pi a^2$

小さい円は $a \times a \times \pi = \pi a^2$ → 半分だから $\frac{\pi a^2}{2}$

$\frac{4\pi a^2}{2} - \frac{\pi a^2}{2} = \frac{3\pi a^2}{2}$

①+②により $S = 6a^2 + \frac{3\pi a^2}{2}$

＊センターライン

①→ 3aが2つあるから $3a \times 2 = 6a$

②→ オレンジの円の円周の$\frac{1}{2}$を求めればよい.

←＊→は、道幅の半分だから$\frac{a}{2}$. よって半径は$\frac{a}{2}+a$になる.

$(\frac{a}{2}+a) \times \cancel{2} \times \pi \times \frac{1}{\cancel{2}} = (\frac{a}{2}+\frac{2a}{2}) \times \pi = \frac{3\pi a}{2}$

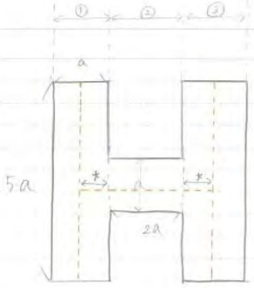
①+②より $l = 6a + \frac{3\pi a}{2}$

lにaをかける $a \times (6a + \frac{3\pi a}{2})$

$al = 6a^2 + \frac{3\pi a^2}{2}$

$S = 6a^2 + \frac{3\pi a^2}{2}$だから $S = al$は成り立つ!

OK!



円をアルファベットのHに変える。
→ 1つ前でアルファベットのUをやってみてS=alが成り立つことが証明できた。点対称のアルファベットNとSをやって成り立つものと成り立たないものがあることを知ったから、線対称でも同じようなことがあるのか疑問に思ったから。

＊面積

①→ $5a \times a = 5a^2$

②→ $2a \times a = 2a^2$

③→ $5a \times a = 5a^2$

①+②+③より $12a^2$

$S = 12a^2$

＊センターライン

①→ 5a，横の←＊→は道幅の半分の長さだから$\frac{a}{2}$

②→ 2a

③→ 5a，横の←＊→は道幅の半分だから$\frac{a}{2}$

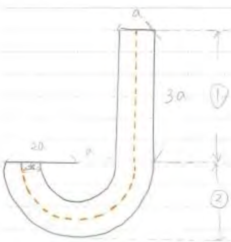
①+②+③より，$12a + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = 13a$　$l = 13a$

lにaをかけると， $13a \times a$

$al = 13a^2$

OK!

$S = 12a^2$だから $S = al$は成り立たない!　なぜだろう?



円をアルファベットのJに変える。
→ 点対称でも線対称でも証明をしてみて成り立つものと成り立たないものがあることを発見したから、PやJのように点対称でも線対称でもない図形でも同じようなことがいえるのかを知りたいと思ったから。

＊面積

①→ $3a \times a = 3a^2$

②→ 大きい円：$2a \times 2a \times \pi \times \frac{1}{2} = 2\pi a^2$

小さい円：$a \times a \times \pi \times \frac{1}{2} = \frac{\pi a^2}{2}$

$2\pi a^2 - \frac{\pi a^2}{2} = \frac{4\pi a^2}{2} - \frac{\pi a^2}{2} = \frac{3\pi a^2}{2}$　$S = \frac{3\pi a^2}{2}$

＊センターライン

①→ 3a

②→ オレンジの円の円周を求める

←＊→は道幅の半分だから半径は$\frac{a}{2}+a$.

$(\frac{a}{2}+a) \times 2 \times \pi = (a + 2a) \times \pi = 3\pi a$

円は半分だから $3\pi a \times \frac{1}{2} = \frac{3\pi a}{2}$　$l = \frac{3\pi a}{2}$

lにaをかけると $\frac{3\pi a}{2} \times a$

$al = \frac{3\pi a^2}{2}$

$S = \frac{3\pi a^2}{2}$だから $S = al$は成り立つ!!　OK!

考察

＊今回の証明で使われた図形と結果＊

点対称	線対称	点対称・線対称ではない
~~N~~・S	~~H~~・U	~~P~~・J

点対称：成り立つ図形(S)と成り立たない図形がある(N)

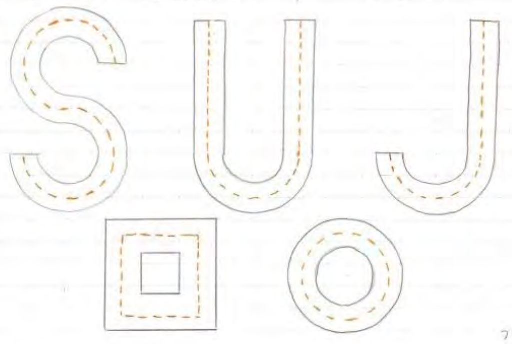
線対称：成り立つ図形(H)と成り立たない図形がある(U)

どちらでもない：成り立つ図形(J)と成り立たない図形がある(P)

それぞれの図形で成り立つものと成り立たないものがある
→ 点対称や線対称は関係がない　そうですね!

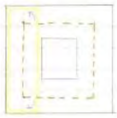
そこでS=alが証明で成り立った図形から共通点を探してみる

＜成り立った図形＞(授業内で証明して成り立った図形も含む)



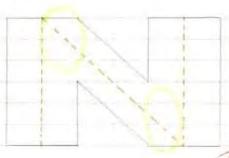
つづく →

5つの図形を比べてみると、面積とセンターラインで、同じ面積の中にセンターラインが2本あったり重なっていないことが共通点だろうと考えた。



授業内で証明した左図のような正方形はセンターラインが同じ面積の中に2本あるが、たとえば、　で囲まれた部分を計算するときに、横に曲がっているセンターラインは上のあいている空間に移動して考えることができる。（道幅はどこも一定）

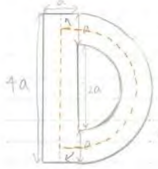
＊成り立たなかった図形を見てみる。（N）



この図形をみてみると、　で囲まれた部分が同じ面積の中にセンターラインが2本含まれていて同じ道幅でも上の正方形のようにあいている門がないからあまってしまっている。

仮説ですね!!

＊本当にこの条件がいえるのか。同じ面積の中にセンターラインが2本含まれていない図形を証明してみる。



＊面積

・$4a \times a = 4a^2$

・大→ $2a \times 2a \times \pi \times \frac{1}{2} = 2\pi a^2$

小→ $a \times a \times \pi \times \frac{1}{2} = \frac{\pi a^2}{2}$

$2\pi a^2 - \frac{\pi a^2}{2} = \frac{4\pi a^2}{2} - \frac{\pi a^2}{2} = \frac{3\pi a^2}{2} = S$

＊センターライン

・$4a$

・$(\frac{a}{2} + a) \times 2 \times \pi \times \frac{1}{2} = (a + 2a) \times \pi \times \frac{1}{2} = \frac{3\pi a}{2} = l$

l に a をかけると $\frac{3\pi a}{2} \times a = \frac{3\pi a^2}{2} = al$

$S = \frac{3\pi a^2}{2}$ だから $S = al$ は成り立つ！

OK!

→ この条件は成り立つ！

前のページでDの図形の $S = al$ が成り立ったことから、同じ面積の中にセンターラインが2本あったり重なっていない、という条件が成り立つことが分かった。

まとめ

＊どの図形でも $S = al$ が成り立つ、という訳ではなく、同じ面積の中にセンターラインが複数重なっていない、という条件を満たしている図形が $S = al$ が成り立つ。

＊そのような図形でも、正方形などセンターラインを移動させて求める特別な図形もある。

$S = al$ が成り立つ条件

同じ面積の中にセンターラインが複数重なっていない図形

感想

今回、様々な図形で $S = al$ が成り立つかを証明して色々な角度から考えることの大切さを改めて実感しました。先生がよくおっしゃている「途中で分からなくなったら一回戻ってプリントなどを見返すといいよ」という言葉を思い出して戻ってみたらヒントとなることをたくさん得ることができました。でしょ！でしょ!! また、前のページのように本当にあっているかな？と疑問を持って考えて、確認するとより根拠が明確になりました。これ、大事!! 今回学んだことはこれから効果的に生かせられたらいいなと思います。また、時間があれば他の図形でもといてみたいです。