

図形の美しさを実感させる数学的活動の授業②

ーシェルピンスキー四面体を利用した風通しのよい日除け模型作りー

藤原 大樹

横浜国立大学教育人間科学部附属横浜中学校

<要 約>

拙稿では、図形の美しさと有用性を実感させることを目的とし、中 1「空間図形」においてシェルピンスキー四面体の模型を爪楊枝で作リ、その活用場面を理解させる実践を報告した。期待する成果があった一方で、①投影図との関連、②活用した日除け等の構造の実感的理解などに課題が残った。

そこで本研究では、松尾らの研究を参考に、シェルピンスキー四面体のもつ図形の美しさを「Ⅰ.視覚的な美しさ、Ⅱ.構造の美しさ、Ⅲ.計算の美しさ、Ⅳ.性質の美しさ、Ⅴ.活用の美しさ」の 5 つを見だし、これらを実感させるために、投影図との関連を図る学習と日除け作りの活動を拙稿に加えて実践した。その結果、生徒の感想と質問紙への回答などから、本実践の有効性が示されるとともに、日除け設計者の立場に立って模型を作らせることなど、日除けの構造を実感的に理解させる手立てを得た。

キーワード：美しさ、数学的活動、投影図

1. 研究の動機

シェルピンスキー四面体とは、有名なフラクタル図形であるシェルピンスキー・ガスケットの立体版で、「正四面体が 4 つで 1 つ」という構造が再帰的に繰り返されている(図 1)。隙間穴だらけだが、ある方向からの平行投影が穴のない正方形になるという性質をもつ。

この性質を活用したものとして、不思議で美しいオブジェ(京都大学大学院人間・環境

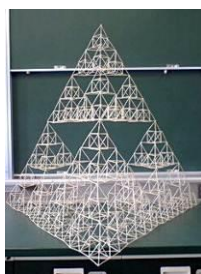


図 1 生徒作品

学研究科 立木秀樹氏：作) とヒートアイランド現象の抑制をねらう日除け(京都大学大学院人間・環境学研究科 酒井敏氏ら：研究中)がある。特にこの日除けは樹木と同様の効果が期待され、平成 20 年 8 月京都に続き、平成 21 年 6 月 24 日から 8 月 31 日に東京お台場の日本科学未来館の入口前(屋外)に実験展示され、話題を呼んだ(産経新聞, 2009)。

拙稿(藤原, 2008)では、図形の美しさと有用性を実感させることを目的として、シェルピンスキー四面体を扱った 2.5 時間の授業(中 1)を報告した。具体的には、シェルピ

ンスキー四面体の模型を爪楊枝とグルーガンを用いて作る活動、この構造を観察して模型の大きさと爪楊枝の本数の関係などを一般化する活動、筆者の作成したスライドを観察してシェルピンスキー四面体の活用場面（オブジェと日除け）について理解する活動を含んでいる。この一連の授業を通して、多くの生徒たちに図形の視覚的な美しさと構造の美しさを実感させ、社会への活用に対する感動を与えることができた。しかしその一方で、例えば次の課題が残った。

- ① 投影図の学習との関連を図り、カリキュラムに適切に位置付けること
- ② オブジェや日除けの構造を実感的に理解するための数学的活動を盛り込むこと
- ③ 美しさと有用性を実感したかどうかを評価する方法について考察すること

そこで本研究では、上記①②に焦点を当て、投影図の学習との関連を図るとともに、一連の授業の中に日除け模型作りを加え、日除けの構造を実感的に理解できるようにしようと考えた。

2. 研究の目的と方法

(1) 研究の目的

- ① シェルピンスキー四面体をもつ図形の美しさを同定すること
- ② 図形の美しさを実感させるために、シェルピンスキー四面体を活用した日除け模型作りを加えた一連の授業が効果的かどうかについて明らかにすること。
- ③ 日除け模型の構造を生徒に実感的に理解させるための手立てを得ること。

(2) 研究の方法

- ① 数学の美しさに関する先行研究を参考に、シェルピンスキー四面体をもつ図形の美しさについて検討する。
- ② 投影図の学習と関連させ、シェルピンスキー四面体の日除け模型作りを加えた一連の授業を構想し、実践する。

- ③ 生徒の感想、質問紙への回答、特徴的な生徒の反応から、図形の美しさを実感できたかを評価するとともに、指導への示唆を得る。

3. シェルピンスキー四面体をもつ美しさ

本研究では、松尾（1990）と池田（2009）を参考にして、シェルピンスキー四面体をもつ図形の美しさを次のように同定した。これらは互いに関連し合うものである。

《シェルピンスキー四面体をもつ図形の美しさ》

- | | |
|------------|-------------|
| I. 視覚的な美しさ | III. 計算の美しさ |
| II. 構造の美しさ | IV. 性質の美しさ |
| IV. 性質の美しさ | V. 活用の美しさ |

I. 視覚的な美しさ

爪楊枝模型、オブジェの画像、フラクタル日除けの画像・模型を見て、その形を視覚的にきれいだと感じることである。個人差はあれ、正三角形や正四面体が規則的につながった形に多くの人はいきれいだと、不思議だと思うであろう。松尾（1990）が「教育上その感得が目指されている算数数学の美しさ」の1つとして挙げた「算数数学の事実に関わる対称性やバランス」にあたると考えられる。

II. 構造の美しさ

4つで1つというパターンでできた立体構造について、統一性があり調和と安定がとれていると感じること、また全て正四面体でできた図形に正八面体が内包されていることに対して面白さや不思議さを抱くことである。ここでいう「構造」とは「図形の構造的（関係的）な理解」におけるそれではなく、「フラクタル構造」におけるそれである。

III. 計算の美しさ

最小の正三角形の枚数や必要な爪楊枝の本数などの様々な数量が、 4^x や $6 \times 4^{x-1}$ など累乗の指数を用いて簡潔に表され、これに美しさや面白さを抱くことである。この背景にはフラクタル構造がある。これは松尾（1990）

の「算数数学の美しさ」のうち、「算数数学を考えていく思考過程における簡潔さ、明瞭さ、的確さ、論理性、統一性など」に含まれる。「図形の美しさ」を、図形に関わる「数学の美しさ」として広く捉えた。

IV. 性質の美しさ

シェルピンスキー四面体の平行投影が隙間のない正方形になる性質に対し、感銘を受けることである。実際に模型を手にとって見てみないと理解しづらい性質であるが、実際に確かめてみることで驚きや神秘性を感じることが期待される。池田（2009）における「図形を数学的に考察することにより、（略）特定の図形に成り立つ特殊な性質に畏敬の念を感じる心」につながる。

V. 活用の美しさ

シェルピンスキー四面体の性質を美術や環境問題に活用した研究者の知恵に感銘を受けることである。池田（2009）の「図形のもつ機能や性質等を日常生活や社会に応用した、その知恵に感銘できる心」が働くことになる。拙稿における「図形の（社会的）有用性」を、この美しさを含めて捉えていくことにする。

以上のI.～V.の図形の美しさを、できるだけ多くの生徒に実感させたい。

4. 授業の流れと実際

(1) 拙稿における一連の授業

拙稿では、横浜市内公立中学校1年生に数学の美しさと有用性を実感させることをねらいとして、次の流れで授業を行った。

第1時	爪楊枝でシェルピンスキー四面体の模型（4重）を作る。
第2時	作った模型を観察して、単位正四面体の個数やその面の枚数、爪楊枝の本数を求め、一般化する。
第3時	パワーポイントを用いた教師のプレゼンを聞き、シェルピンスキー四面体の性質を利用したオブジェと日除けについて理解

する。2.5時間分の課題学習を振り返って感想を書く。

第1時は、シェルピンスキー四面体のフラクタル構造を理解させる重要な数学的活動が実現できた。第2時では、既習の見方や考え方をフルに使い、様々な数量を文字で一般化することができた。第3時は、スライドの内容は生徒たちに大きなインパクトと感動を呼んだが、その一方で、次の反省を残した。

- ・投影図との関連が強い内容だが、生徒は投影図を意識しないまま学習を進めた。
- ・スライドの画像を見ただけなので、オブジェと日除けの構造（特に、どのように面が貼られてあるか）について十分に理解できなかった。

特に、前述のII.とIV.とV.の美しさは、見ただけで実感するのは難しい。実際に試行錯誤して日除け模型を作り、自由に観察してみても初めて日除けの構造がよくわかり、実感・感動するのである。実際筆者がそうであった。

以上のことから、投影図との関連が強く意識できる学習と日除け作りの活動を、拙稿の第3時以降に位置付けることにした。

(2) 本研究における一連の授業構想

本研究では次の流れで実践することにした。

第1時	爪楊枝でシェルピンスキー四面体の模型を作る。（拙稿と同じ）
第2時	作った模型を観察して、単位正四面体の個数やその面の枚数、爪楊枝の本数を求め、一般化する。（拙稿と同じ）
第3時	立体の木製模型に光を当てて影を映し、円柱や正四角錐などの投影図を考える。 「これは何という立体の影？」 「投影図が正六角形になる図形は？」 「投影図が正方形になる図形は？」 「正四面体の投影図が正方形になるときがあります。」
	面構造のシェルピンスキー四面体の投影図がどんな図形になるかを予想する。辺構造の

第3時	爪楊枝模型を観察して、穴のない正方形になりそうであることを確認する。
第4時	パワーポイントを用いた教師のプレゼンを聞き、シェルピンスキー四面体の性質を活用したオブジェと日除けについて理解する。
第4時	辺構造の爪楊枝模型（手のひら大）に色画用紙を貼り、日除け模型を作り始める。
第4時	第3時の続きで、日除け模型を完成させる。
第4時	4時間分の授業を振り返って感想を書く。
第4時	質問紙に回答する。

(3) 授業の実際

平成20年3月、横浜市内公立中学校1年2組の少人数クラス16名を対象に、「空間図形」学習の最後に行った。

【第1・2時】 紙面の都合上割愛する。

【第3時】 教室を暗くし、プロジェクターで立体の木製教具の影を映し出し、実際の影を見て基の立体を考えさせた。次に、影が正六角形になる立体と正方形になる立体について考えさせ（図2）、正四面体の平行投影が正方形になるときがあることを理解させた。



図2 影が正六角形になる立体

その後、面構造のシェルピンスキー四面体の投影図を考えさせた。1人ずつ辺構造の爪楊枝模型を図3の方向から眺めさせると、「ホントだ」「すげー」等の声があがった。これ

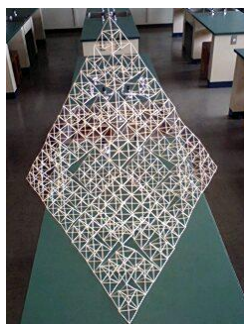


図3 眺めさせる

は性質の理解に実感が伴った姿といえる。

次の教師によるプレゼンはどの生徒もとても熱心に見入り、特にオブジェの画像では「おー」「すごい」などと歓声があがった。

プレゼンを終えた後、「風通しが良くて、穴のない正方形になる日除けを作ろう」と投げかけた。生徒はとても意欲的で、正三角形の枠を印刷した数種類の色画用紙を思い思いに選び、枠で切り、準備してあった2重の爪楊枝模型に貼り始めていった。



図4 貼る面を工夫して日除け模型を作る

途中、「コストを安くするために、紙を貼る面をできるだけ少なくしよう！」と伝えた。設計者側の立場で工夫させることで、数学的に考える必要感が生まれ、生徒たちは模型を手じゅくり考えた。作り始めて10分ほどで授業終了のチャイムが鳴った。

【第4時】 前時の日除け模型作りの続きを行った。授業の最初に、「隙間のない正方形に見えるように」「風通しを良く」「コストを安くできるように」と再確認した。スムーズに正三角形の面を最適な8面に貼って完成させた生徒はおらず、全員苦戦していた。

例えば男子生徒Fは、面を貼るのと眺めるのを慎重に繰り返し、「あれ?」「この面いらんじゃん」などとつぶやきながら、作っていった。一旦貼った面を貼り直す場面も何度かあった。

また女子生徒Mは、図5のように正三角形を10面に貼った模型を作り、「できたー」と周囲に自慢していた。しかし近くの生徒から「なんか風通しが悪いよ」「面が多くてコストが高くなるんじゃない?」などと指摘され、より風通しの良い模型を作れることができる



図5

ことに気づき、修正し始めた。

生徒の中には「先生、紙の貼り方は1種類しかないの？」と質問する者がいた。図形の対称性から、最適な面の貼り方は一意に決まるが(図6)、

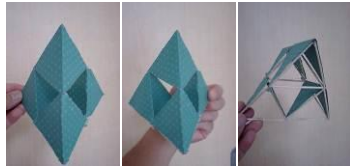


図6 最適な日除け模型

試行錯誤したり投影面や面と面の平行に着目したりしながら、これに近づけていった。ほとんどの生徒は図

6のものを作れたが、正しくできたものとするのでないものを最後に取り上げ、面の貼り方を比較させた。

感想と質問紙を記入させて授業を終えた。

5. 図形の美しさの評価に向けた質問項目

前述のI.~V.に対応させ、質問紙の質問項目を表1の1.~8.とした。なお、項目8.は拙稿における図形の社会的有用性をも評価できる項目として捉えることにする。

表1 シェルピンスキー四面体がもつ図形の美しさと質問項目

図形の美しさ	質問紙の質問項目
I. 視覚的な美しさ	1. つまようじで作った大きなシェルピンスキー四面体を見て、「きれいだなあ」と思った。
	2. オブジェ「フラクタルユニバーシティーKYOTO」を見て、「きれいだなあ」と思った。
	3. 日除け「フラクタル日除け」を見て「きれいだなあ」と思った。
II. 構造の美しさ	4. 「4つで1つ」が繰り返されるという構造で安定した立体がつくれて、「面白いなあ」とか「すごいなあ」と思った。
	5. すべて正四面体でできているにも関わらず、真ん中の空洞は正八面体ができていることに「不思議だなあ」とか「面白いなあ」と思った。
III. 計算の美しさ	6. 正三角形の枚数や爪楊枝の本数などの数量が、累乗の指数を使って簡潔に表せる(4 ⁿ など)ことが「面白いなあ」「きれいだなあ」と思った。
IV. 性質の美しさ	7. シェルピンスキー四面体の投影図が、穴のない正方形になることに「すごいなあ」と思った。
V. 活用の美しさ	8. シェルピンスキー四面体が美術や環境問題に活用されていることに「すごいなあ」と思った。

6. 生徒の感想と質問紙への回答

(1) 第3・4時の感想

例えば、次のような感想があった。

- ・シェルピンスキー四面体について全く知らなかったので、驚いたというか、何というか、すごいなあと思いました。しかもこの不思議な図形を日除けに利用しようと研究している人があるというのも驚きでした。でも、パラソルのようなものよりも涼しくて、自然の木陰にいるような気分になれるというのは魅力的だと思います。私たちの生活の中にもいかして行けるといいなあと思います。(女子)
 - ・未来で日除けの模型が町に広がったらとても楽しいと思うし、自分たちも作ってみてとても楽しかったので良かった。未来のことをみんなより早く知ったので良かった。(男子)
- これらは特に「V.活用の美しさ」を十分に味わ

ったと解釈できる。図形と社会・自然のつながり、図形に対する未来への期待にまで関心が及んでいる。他には次の感想があった。

- ・ある角度に紙を貼ってみると、穴のない正方形ができるという性質が良くわかり、やっていくと風を通すということがわかった。(男子)
- ・普通にやればすぐつくれるけど、より安い費用で作らなければいけないので、すごく悩みましたが、より安い費用で作ることができました。(男子)

これらの感想からは、日除け模型の構造を実感的に理解させる手立てとして、模型を実際に作らせること、その際に設計者の立場で工夫させることが有効であると解釈できる。

(2) 質問紙への回答

質問紙への回答は表 2 の通りである。「Ⅲ. 計算の美しさ」を問うた項目 6 は 16 人中 2 人がやや否定的であったが、それも含めて、ほぼ 9 割～全員がすべての項目に対して肯定的な反

応を返している。対象人数が少ないため事例的にはなるが、本実践を通し、シュルピンスキー四面体のもつ図形の美しさを極めて多くの割合の生徒に実感させることができた。

表 2 質問紙への回答 (16 名)

質問項目 (質問文は一部省略)	大変 そう思った	そう思った	あまりそう 思わなかった	思わなかった
1. つまようじ模型「きれい」	12人 (75.0%)	4人 (25.0%)	0人 (0.0%)	0人 (0%)
2. オブジェ「きれい」	12人 (75.0%)	3人 (18.8%)	1人 (6.3%)	0人 (0%)
3. 日除け「きれい」	10人 (62.5%)	5人 (31.3%)	1人 (6.3%)	0人 (0%)
4. 「4つで1つ」構造「面白い」「すごい」	14人 (87.5%)	1人 (6.3%)	1人 (6.3%)	0人 (0%)
5. 正八面体の空洞「不思議」「面白い」	9人 (56.3%)	6人 (37.5%)	1人 (6.3%)	0人 (0%)
6. 4のx乗などで表せる「面白い」「きれい」	8人 (50.0%)	6人 (37.5%)	2人 (12.5%)	0人 (0%)
7. 投影図が穴なし正方形「すごい」	14人 (87.5%)	2人 (12.5%)	0人 (0.0%)	0人 (0%)
8. 美術・環境に活用「すごい」	14人 (87.5%)	2人 (12.5%)	0人 (0.0%)	0人 (0%)

7. 研究の成果と課題

本研究を通して、次の成果が得られた。

- ①シュルピンスキー四面体をもつ図形の美しさとして、「Ⅰ.視覚的な美しさ、Ⅱ.構造の美しさ、Ⅲ.計算の美しさ、Ⅳ.性質の美しさ、Ⅴ.活用の美しさ」の5つが同定された。この図形を活用した日除け作りの活動を加えた一連の授業を通して、事例的ではあるが、極めて多くの割合の生徒に図形の美しさを実感させることができた。
- ②シュルピンスキー四面体の平行投影が隙間のない正方形になるという性質を実感的に理解させる手立てとして、正四面体の木製模型に光を当てて投影させたり、辺構造の模型をある方向から眺めさせたりすると効果的である。
- ③シュルピンスキー四面体を利用した日除けの構造を実感的に理解させる手立てとして、風通しやコストなどを考慮に入れるなど、設計者の立場で工夫させる方法が有効である。今後の課題として次の2点を挙げておく。
- ④シュルピンスキー四面体を活用した日除け模型作りの活動で、生徒の思考の様相をいっそう詳しく分析すること。

- ②図形の美しさを実感させられる教材をシュルピンスキー四面体以外に開発し、実践を蓄積することで、図形の美しさ、並びにこれを実感させる指導について一般化すること。

〔引用・参考文献〕

- 池田敏和 (2009) 「図形の何に美しさを感じるのか?」, 科学研究費補助金基盤研究 (C) 課題番号 20500749 「図形についての豊かな感覚・美しさを感じさせる指導」 (研究代表者: 前田正男) 第 5 回会合資料。
- 大谷一義・室岡和彦・菅田顕・一松信・片桐重男 (1991) 「算数・数学のよさ美しさ (日数教 (愛媛) 大会シンポジウム)」, 日本数学教育学会誌第 73 巻第 1 号, pp.45-50.
- 産経新聞 (2009) 「幾何学で美しく」, 6 月 30 日付第 1 面.
- 藤原大樹 (2008) 「図形の美しさと有用性を実感させる数学的活動の授業—シュルピンスキー四面体を題材として—」, 第 41 回数学教育論文発表会論文集, pp.387-392.
- 松尾七重 (1990) 「算数数学の美しさを感じ得るための方法」, 『千葉大学教育学部研究紀要 I 教育科学編 47』, pp.71-79.
- ※本研究は科学研究費補助金基盤研究 (C) 課題番号: 20500749 「図形についての豊かな感覚・美しさを感じさせる指導」 (研究代表者: 前田正男) の助成を受けている。

