

数学科 学習指導案

横浜国立大学教育人間科学部附属横浜中学校 藤原 大樹

1 対象・日時 2年A組 平成24年6月11日(月) 6校時

2 本小単元で身に付けさせたい力

- ・数や図形の性質を見だし、文字を用いた式でとらえ説明する力

3 本小単元の評価規準 (※平成22年11月『評価規準の作成のための参考資料』に基づいて作成)

数学への 関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な技能	数量や図形など についての知識・理解
① 文字を用いて表現したり、目的に応じて式を変形したり、その意味を読み取ったり、計算したりすることに関心を持ち、命題が成り立つことなどを説明しようとする。	② 文字を用いて表現したり、目的に応じて式を変形したり、その意味を読み取ったりして、命題が成り立つことを説明することができる。	③ 具体的な場面で、数量や数量の関係を文字式で表したり、関係を表す式を目的に応じて変形したり、文字式の意味を読み取ったりすることができる	④ 数量及び数量の関係を帰納や類推によってとらえ、それを文字を用いた式を使って一般的に説明することの必要性和意味を理解している。

4 小単元・教材について

(1) 小単元・教材名 ・式の利用 ・広いのはどっち？

(2) 小単元「式の利用」について

1年次には、数量の関係や法則を文字式で表すことを学習している。対象生徒については、文字式のよさを感じさせるねらいで、見いだした数の性質を文字式を用いて確かめる素地活動を行った。これらを前提として本年度(2年次)は、実際に数や図形の性質を見だし、これを文字式でとらえ説明する活動を通して、文字式に表現したり式を読み取ったりする能力を養う。指導においては、記述方法を形式的、固定的に捉え過ぎず、文字の置き方や式変形の仕方を柔軟に受け止めて、数学的な思考力・表現力を伸ばしていく。また、主体的な学習を目指し、結果を予想したり問題の条件を変えて新たな問題をつくったりする場面を設けていく。

(3) 教材「広いのはどっち？」について

本時では図1と図2を提示して、灰色の部分の面積を比較し、そのことを文字式を用いて説明する場面をまず設定する。例えば、図Bの半径を a と置くと、面積はそれぞれ、 $\pi \times (3a)^2 = 9\pi a^2$ (図1)、 $\pi \times a^2 \times 9 = 9\pi a^2$ (図2) となり等しくなる。

次に、問題の条件を一部変えて、生徒自身が問題をつくる場面を設定する。これはいわゆる「問題づくり」(竹内・澤田, 1984)であり、数や図形などの性質を見だし発展させる数学的活動として位置付けられる。本教材において、問題の条件を変える生徒の反応例として、次のものが考えられる。

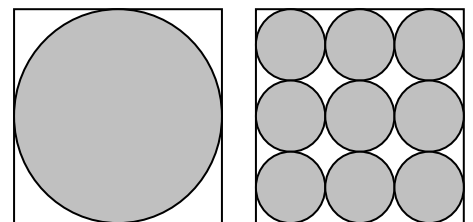


図1 図A

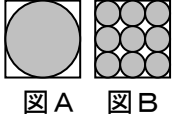
図2 図B

- ・数を変える : 1辺に5個の円が並んだ場合を考える。
- ・数を文字にする(一般化する) : 1辺に n 個の円が並んだ場合を考える。
- ・図形を変える : 円を正三角形に変える。円を楕円($S = \pi r_1 r_2$)に変える。正方形を長方形に変える。
- ・次元を変える : 円を球に変える。正方形を立方体に変える。
- ・量を変える : 面積を体積に変える。面積を表面積に変える。

これらを通して、「図形が相似なら並ぶ個数や形は関係なく面積が等しい」という本教材の本質に迫らせたい。

5 能力育成のプロセス(5時間扱い、本時 は4時間目)

次	時	<p style="text-align: center;">評価規準</p> <p>※()内はAの状況を実現していると判断する際のキーワードや具体的な姿の例 (①から⑥は、3の評価規準の番号)</p>	<p style="text-align: center;">【 】内は評価方法 及び Cの生徒への手だて</p>
3	1	<p>技③ 具体的な場面で、数量や数量の関係を文字式で表したり、関係を表す式を目的に応じて変形したり、文字式の意味を読み取ったりすることができる。(○)</p> <p>(A：目的に応じた式変形)</p> <p>知④ 数量及び数量の関係を帰納や類推によってとらえ、それを文字式を使って一般的に説明することの必要性和意味を理解している。(○)</p>	<p>【ワークシート】</p> <p>C：他の生徒の考えを引き出ししながら、文字の置き方の例を全体で確認する。</p> <p>【ワークシート、活動の観察、発言】</p> <p>C：これまでの学習を振り返り、文字を使えばどんな数でも成り立つことを示すことができることを再度指導する。次時以降も継続的に指導する。</p>
	2	<p>技③ 具体的な場面で、数量や数量の関係を文字式で表したり、関係を表す式を目的に応じて変形したり、文字式の意味を読み取ったりすることができる。(○)</p>	<p>【ワークシート】</p> <p>C：奇数の表し方(既習)を、偶数の表し方に帰着して考えさせる。また、連続する奇数の表し方についても、個別あるいは全体で確認する。</p> <p>C：目的に応じた式変形の必要性を理解させる。</p> <p>C：式変形から結論に至る根拠を記述させる。</p>
3		<p>技③ 具体的な場面で、数量や数量の関係を文字式で表したり、関係を表す式を目的に応じて変形したり、文字式の意味を読み取ったりすることができる。(○◎)</p> <p>(A：差や3けたの数での式表現や式変形)</p> <p>見② 文字を用いて表現したり、目的に応じて式を変形したり、その意味を読み取ったりして、命題が成り立つことを説明することができる。(○)(A：差や3けたでの説明)</p>	<p>【ワークシート、小テスト】</p> <p>C：2けたの自然数の表し方(既習)を確認する。</p> <p>C：前時の証明から、式変形の仕方を類推させる。</p> <p>C：式変形から結論に至る根拠を記述させる。</p> <p>【ワークシート】</p> <p>C：前時の証明を振り返り、説明の方針を立てさせる。</p>
4 5		<p>関① 文字を用いて表現したり、目的に応じて式を変形したり、その意味を読み取ったり、計算したりすることに関心を持ち、命題が成り立つことなどを説明しようとする。(○◎)</p> <p>(A：発展的に考えるよさ、説明の相手意識)</p> <p>見② 文字を用いて表現したり、目的に応じて式を変形したり、その意味を読み取ったりして、命題が成り立つことを説明することができる。(○◎)</p> <p>(A：統合的な見方、問題の構造の見極め、課題の本質に迫る条件の変え方)</p>	<p>【活動の観察、ワークシート】</p> <p>C：文字の置き方や説明の仕方がわからなくて意欲がもてない生徒には、まず具体的な数で考えてからその数を文字に変えるなど、個別に指導する。</p> <p>C：問題の条件の変え方がわからなくて意欲が持てない生徒には、1年次や本単元導入での類似の学習を振り返り、参考にして問題をつくらせる。</p> <p>【ワークシート】</p> <p>C：文字の置き方や説明の仕方に見通しがもてない生徒には、まず具体的な数で考えてからその数を文字に変えるなど、個別に指導する。</p> <p>C：問題の条件の変え方が考えられない生徒には、1年次や本単元導入での類似の学習を振り返り、参考にして問題をつくらせる。</p>

<p>主たる学習活動 ※主に思考力・判断力・表現力等の 育成に関わる言語活動に下線</p>	<p>指導上の留意点・ポイント</p>	<p>時</p>
<p>・問題を理解する。</p> <p>問題 横長の長方形の用紙があります。重ならないように縦に丸めて作った円柱Aと横に丸めて作った円柱Bでは、どちらの体積が大きいですでしょうか。</p> <p>・文字を用いて、説明を考え記述する。</p> <p>・どちらの体積が大きいかを説明できた生徒には、どのように大きいかを式変形などから説明する。</p> <p>・考えや説明を共有し、文字の置き方の重要性、式の意味の読み取りの重要性、文字式の有効性を理解する。</p>	<p>・実際に画用紙を丸めて円柱を作って見せ、直感的に結果を予想させて関心を高める。</p> <p>・「縦を10、横を20とする」など、具体的な数で考えるのは予想に過ぎないが、結果の見通しを立てるには有効であることを理解させる。</p> <p>・どのように大きいかを説明するには、差や比に着目すればよいことに気付かせたい。</p>	<p>1</p>
<p>・連続する3つの奇数の和が何になりそうか予想する。</p> <p>・予想したことから命題をつくり、問題を理解する。</p> <p>問題 次の命題が正しいことを証明しなさい。</p> <p>連続する3つの奇数の和は、奇数になる。</p> <p>・文字式を用いて個人で証明を考え、記述する。</p> <p>・全体で証明を共有し、式変形による正誤を検討する。</p> <p>・文字式を用いて証明する際の要点、及び結論によって式変形の仕方が異なることを理解する。</p>	<p>・具体的な数で試して予想させる。</p> <p>・用語「命題」や「証明」の意味を簡潔に説明し理解させる。前提条件と結論に分けて命題を表現することを特に意識させる。</p> <p>・基本事項として、連続する3つの奇数をどう表すか全体で確認した上で証明を考えさせる。</p> <p>・いくつかの証明を実物投影機等で共有し、文字の置き方による証明の違いなどを理解する。</p>	<p>2</p>
<p>・問題を理解する。</p> <p>問題 次の命題が正しいことを証明しなさい。</p> <p>2けたの自然数と、その数の一の位と十の位を入れ替えた数との和は、11の倍数になる。</p> <p>・文字式を用いて個人で証明を考え、記述する。</p> <p>・4人グループで記述した証明を読み合い、評価・改善したり、疑問を共有したりする。</p> <p>・問題を「3けたの自然数」に変えて小テストを行う。</p>	<p>・第2時同様、具体的な数で予想させる。</p> <p>・進んだ生徒には、問題の条件を差に変えて考えさせる。</p> <p>・第2時で「奇数をaとしてもよいか」等、素朴な疑問を取り上げ、全体で共有し検討する。</p>	<p>3</p>
<p>・問題を理解する。</p> <p>問題 次の命題が正しいことを証明しなさい。</p> <p>正方形に内接する1個の円(図A)と、同じ正方形の1辺に3個並ぶように内接した9個の円(図B)とでは、面積が等しい。</p>  <p>図A 図B</p> <p>・文字式を用いて個人で証明を考え、記述する。</p> <p>・全体で共有する。</p> <p>問題 問題の条件を一部変えて、新しい問題をつくらせて証明を考えなさい。</p> <p>・新しい問題をつくる。</p> <p>・</p> <p>・第5時の最後で4人班で10分間共有し、助言し合う。</p> <p>・家庭学習で補足させ、提出させる。</p>	<p>・射的を例にして面積に着目させる。</p> <p>・第1時同様、直感的に結果を予想させる。</p> <p>・問題の波下線部ははじめ空欄にしておき、第1時同様、発見的なアプローチを試みる。</p> <p>・進んだ生徒を指名し、黒板に証明を書かせる。</p> <p>・文字の置き方が異なる証明を取り上げ、その工夫について理解をいっそう深める。</p> <p>・「等しい」という結論について「どんなときでもいえるでしょうか」と発問し、生徒に問いをもたせる。</p> <p>・問題をつくる際の見通しや着想が大切であることを伝え、記述させるようにする。その記述を机間指導に生かすようにする。</p> <p>・1年次の学習「5×5のマス目」や「ストローの問題」、本単元の導入の問題「赤道と世界一周道路」など、過去に経験した類似の学習を参考にして問題をつくらせる。</p>	<p>4 5</p>

6 思考力・判断力・表現力等の育成と言語活動

【思考力・判断力・表現力等が育成されている姿】

- ・数や図形の性質を見だし、その命題を文字を用いた式でとらえ、成り立つことを説明している。



【言語活動の具体】

- ・見いだした数や図形の性質についての命題を、文字を用いた式でとらえ説明する。
- ・問題の条件を一部変えて、成り立ちそうな新たな性質を見だし、前提条件と結論を記述する。

【言語活動の質を高める工夫】

(1) 見いだした数や図形の性質について、前提条件と結論を分けて表現させる。

見いだした性質の前提条件と結論を「～は…になる」という命題の形で表現させることで、考察の対象が明確になり真偽の判定がしやすくなる(国立教育政策研究所, 2012)。なお、主部と述部に分けた表現形式が重要なのではないので留意したい。また、問題の条件を変えて発展的に考えさせる手立てとして、前提条件や結論の構成要素に着目させ、「前提条件をこう変えたら結論はどう変わるか」と考えさせることが有効である。

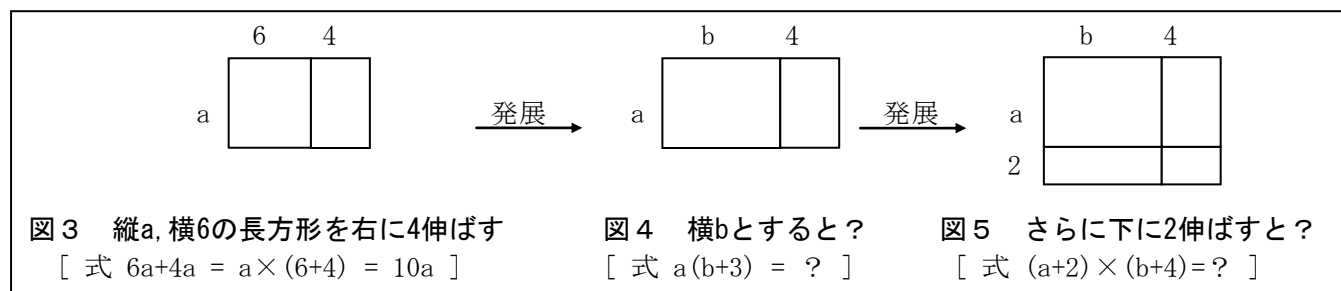
(2) 「なぜ(問題の条件を)そう変えたのか」を記述させる。

生徒の問いを大切に主体的な学習を進めるため、生徒が問題の条件を変えたときの見通しや着想をメタ認知できるように、「なぜそう変えたのか」を記述させる。なお、新たな問題をつくるときに記述するだけでなく、新たな問題をつくって説明を終えた後で振り返り、自分が何を明らかにしようとしていたのかを整理する形で記述することも当然あり得る。具体的には、「円を三角形に変えても面積が等しくなりそう」、「円を球に変えると体積が等しくなりそう」、「円を球に変えると表面積は等しくならなさそう」等が予想される。

7 本小单元における“新たな学びへの意欲”とその指導

本小单元で言語活動の中から見いだしたい“新しい学びへの意欲”は、「こうしたらどうなるだろうか」といった新たな見通しや着想をもつことである。具体的には、数学の世界における考察であれば、数や形や次元を変えたらどうなるか、数を文字に変えて統合し一般化できるか、前提条件と結論を変えて逆が正しいといえるか、具体的な問題場面を変えることはできるか、…などである。発展的な考え方と言い換えることもできよう。

このような発展と統合の繰り返しによる探究的な過程は、人間が数学をつくり上げてきた過程そのものである。この要素を習得の授業に取り入れて構成し、生徒の問いを連続的に誘発しながら進めていくことが、活用の授業の前提として考えられる。例えば、本单元「式と計算」で面積図(長方形)などを根拠にして単項式や多項式の計算法則を学んでいくが、1年次既習の分配法則(単項式の和)の面積図(図3)を、まず単項式と多項式の積に発展させて中2の学習ができる(図4)。さらに発展させると、生徒の問いを基に未習(3年生)の乗法公式(図5)にも触れられる。3次元にすると体積図(直方体)にも発展でき、既習の計算法則を深めることもできる。



本時においては、記述させた見通しや着想、及び問題とその説明から、生徒一人一人の思いと考えの両方を読み取り、見通しのある探究につながるように助言する。そして家庭学習で補足させた後、プリントを回収して評価し記録に残す。返却時には、数名の生徒の活動を紹介し、今後の類似の活動の参考にさせたい。

なお、数学科における探究的な学習活動としては、本時のような数学の世界における「問題づくり」(竹内・澤田, 1984)の他に、現実の世界における数学的モデリングや統計的問題解決(PPDAC等)などが考えられる。

【参考文献】

- ・国立教育政策研究所(2012)「平成24年度全国学力・学習状況調査解説資料 中学校数学」, p.83.
- ・竹内芳男・澤田利男(1984)『問題から問題へ』, 東洋館出版社.