

学校設定科目「数学探究」

数学科

阿 部 真 由 美 ・ 三 橋 一 行 ・ 十 九 浦 美 里

スーパーサイエンスハイスクールⅡ期より開発・実施している「数学探究」の『身近にある問題を数学的に楽しもう』をテーマにした3つの授業について、2時間分の最初の1時間目を公開した。

1. 学校設定科目「数学探究」年間指導計画

科目名	数学探究		履修学年(単位数)	第1学年(2単位)・必修	
教科書	独自の教材テキスト				
副教材	なし				
目標	・課題に取り組む粘り強さや、論理的に考え、物事の本質を捉えようとする態度を養うとともに、発想を豊かにする訓練の場とする。 ・数学的好奇心、論理的思考力、批判的思考力を育成する。 ・課題研究で必要となる統計(数学Bの統計分野)の根拠となる数学的概念について学び、統計的分析の質の向上につなげる。				
年間授業計画					
時期	テーマ	学習内容	時数	目標・内容の具体	
4月	数の扱い～指数・対数～	・指数の拡張 ・指数法則 ・対数	3	指数の数の拡張を体験する。 指数法則を用いた指数計算ができる。 対数の定義を理解する。	
5～6月	身近にある問題を数学的に楽しもう	・作図×論理 ・公理系のはなし ・折り紙の中の数学 ・包絡線の証明	9	身近なテーマを扱い、興味、関心を高める。 既習の内容や与えられた知識を応用しながらそれぞれのテーマでの課題に、生徒が主体的に取り組むことを中心に授業を行う。 数学的論拠に基づいた説明や証明などを通して考察力、また主体的かつ粘り強く問題に取り組む態度を培う。	
7月	「難しい」が面白いを体験しよう	数学オリンピック関連の問題	3	難しい問題に対して、多角的にアプローチしたり、試行錯誤を通して、考えることの面白さを実感する。問題の本質を捉える力、難しい問題に対しても粘り強く柔軟に、主体的に考える姿勢を培う。	
8～9月	数学自由研究	・数学自由研究(夏休みの課題) ・研究発表 ・特別講義	6	自分の興味関心を広げる。 数学的論拠に基づいて、考察をすすめたり批判的思考力をもって研究を行う。また研究内容を自分のことばで論理的に簡潔表現する力を養う。	
10～12月	新しい概念を学んで数学の世界を広げよう	・無限の世界 ・虚数の世界 ・行列の世界 ・面積と体積のはなし	9	・無限、虚数、行列の概念について学ぶ。演算法則や構造に着目したり、既習の内容と関連づけたり、比較したりしながら、考察するとともに、数学の世界の広がりを実感する。	
1～3月	統計を支える数学(ベクトル)の概念の学習	・ベクトル ・相関係数と偏相関係数のベクトルによる幾何学的解釈	9	・ベクトルの基本概念と基本演算を身に付ける。 ・内積と相関係数との関係を見出し、それぞれの理解を深める。	
評価 規 準	知識・技能		・基本的な概念や原理・法則を体系的に理解している。 ・事象を数学化したり、数学的に解釈したり、数学的に表現・処理したりする技能を身に付けている。		
	思考・判断・表現		・事象を数学的に考察し表現する力、事象の本質や他の事象との関係を認識し統合的・発展的に考察する力、数学的な表現を用いて事象を簡潔・明瞭・的確に表現する力を身に付けている。		
	主体的に取り組む態度		・粘り強く柔軟に考え数学的論拠に基づいて考察を進めることができる。 ・問題解決の過程を振り返って考察を深めたり、評価・改善しようとしていたりしている。学びの過程についても振り返りを行い、自己評価、改善を行っている。		
評価 方法	各テーマごとの課題や小テスト、振り返り。夏休みの課題研究、授業への取り組みなどを総合的に評価する。				
備考	年間授業時数：39時間				

2. 授業の目標・展開・題材の留意点

2-1 「包絡線」 授業者 十九浦 美里

(1) 本時の目標（ねらい）

- ・ 2 次曲線（楕円・放物線）の幾何的定義や包絡線の定義を理解する。
- ・ ある現象（放物線が現れる）を数学のことばで理解し、なぜそうなるのかを論理的に考察することを通して数学のよさを実感する。
- ・ 学習した定義や既習事項を結びつけながら粘り強く主体的に考察する。

(2) 授業の流れ

時間	学習内容・学習活動	指導上の留意点
導入 15 分	・ 課題 1 の手順を説明して、紙を折る。 【課題 1-1】 1 枚の紙を用意する。この紙に点 Q をとる。紙の底辺 m 上のある点 P をとり、点 P と点 Q が重なるように紙を折る m 上の点 P を複数とり、この操作を繰り返す。 現れる図形が何かを推測しながら作業を行った。徐々に生徒の中から「放物線」という言葉がでてきた。 包絡線の定義を確認 「平面上に、ある法則に基づいて決まる直線（曲線）の集まり（直線族 L とおく）が与えられたとき、L の各要素に接するような曲線を包絡線という」 課題 1 ででてきた包絡線が「放物線」であることを確認した。 Grapes を用いて、同じ操作を実現し、直線族の各要素が、放物線に接していることを確認した。（授業では、プロジェクターがうまく作動せず、タイミングが少し後で見せる形となった。） 【課題 1-2】「なぜ、この操作で「放物線」が現れたのかを解明しよう。」を提示する。	・ 黒板で操作について説明し、生徒と確認しながら進める。 ・ 折り方を間違えている生徒がいないか、周囲の生徒同士でも確認するように伝える。 ・ プリントにある包絡線の説明が今回の操作のどの部分に対応するのかを確認する。 ・ 折り線が接線であることは視覚的に理解する。
展開 1 15 分	解明する上でのキーワードの確認 キーワード 1：放物線（2 次曲線）の定義 円：ある点からの距離が等しい点の集まり 楕円：ある 2 点からの距離の和が一定の点からの距離が一定の点の集まり 双曲線：ある 2 点からの距離の差の絶対値が一定の点の集まり 放物線：定点（焦点）とその点を通らない直線（準線）からの距離が一定の点の集まり ・ 焦点と準線を予想する。 焦点 → 点 Q 準線 → 底辺 m この予想を確認した。	・ 楕円は黒板で実際に描き、定義の内容を確認した。 ・ 放物線については、プリントの放物線と定規を活用して、放物線上の点がこの定義を満たしていることを確認する。 ・ 双曲線については定義の紹介のみ ・ 焦点と準線について操作を振り返りながら予想をする。 ・ 予想ではあるが、これを仮定して話を進めることを理解する。
展開 2 15 分	キーワード 2：包絡線の性質 ・ 包絡線 C 上のどの点においても、その点で C に接する直線族 L の要素が必ず存在する。 ・ 包絡線 C と直線族 L の各要素は接点の付近では共有点を 1 点しかもたない。 この性質から、折り目である直線 1 本にある無数の点のうち、どの 1 点が放物線の 1 点になっているのかを見つければよいことを確認し、 → 折り目の 1 本の直線につき、放物線の点となっている 1 点を見つけよう。 ここから、3 人または 4 人グループの形をとり生徒主体の活動に移行した。 途中で キーワード 3：折り目は線分 PQ の垂直二等分線になっている。 を確認し、キーワードをふまえて考えてみるように声かけを行った。 グループ内では生徒同士、「今何をやればよいのか」などの確認や、キーワードを 1 つずつ確認する様子などがみられ、少しずつ答えにたどりつくグループがでてきた。グループを指名し、黒板で説明してもらい、どの 1 点が放物線の 1 点になっているのかを全体でも確認した。	・ 机間巡視を行いながら生徒の説明の状況に応じて補足やヒントをいれる。 ・ みつけた点が、放物線の定義をみたしていることを理解する。 ・ 考察した内容を整理し、自分のことばで、まとめるように伝える。
まとめ 5 分	各グループでわからない部分などを説明しあい理解を深める。 → 各自、説明を記述する。（この時間はあまりとれなかった。） 次回の課題 2 では、別の包絡線について考察する。 今回の課題 1 がヒントになるため、今日理解したことを自分のことばでまとめておくよう伝える。	

(3) 第2時間目の授業の概要

課題 2-1: 課題1での直線 m を円で置き換え、点 Q を内部にとるとどのような包絡線が浮かび上がるか。

課題 2-2: なぜ、このような包絡線になるのか、考察してみよう。

包絡線が楕円になること、2つの焦点の予想(点 Q と円の中心)をたてるところまでは、全員で結果を確認しながら行い、その後は、前回の考え方をヒントに自分で考え、その説明をする課題を提示した。考えるときはグループでよいが、説明は分かったところまででよいので、自分のことばで書くように指示する。

(4) 題材の留意点

本来は直線族の各要素が包絡線の接線になることを示す必要があるが、今回は性質として紹介し、それを前提とした上で、直線のどの点が包絡線(放物線)の1点になっているのかを、放物線の定義と垂直二等分線の性質から探すことで、放物線が浮かび上がる理由に迫っている。また、垂直二等分線の存在範囲を考えて、境界が放物線になることも導けるがこれは数学Ⅱの範囲となる。

2-2「公理系のはなし」 授業者 三橋 一行

今回は次のような目標と指導案によって授業を行った。指導案の流れに沿って授業ができた。少々次の時間の内容に触れてしまった。本来は、次の時間の「語を数に置き換えることで、整数の性質を用いて証明の可能性を知ることができる」ということがメインの授業なので早くそこに至りたかった。語を数で表すということは生徒にとってとても興味深く、ゲーデルの仕事の凄さを学ぶ良い機会となった。

(1) 本時の目標(ねらい)

- ・自然科学と数学の考え方は異なることを理解する。
- ・MIU語の公理を用いた証明問題を解くことにより、演繹法の見方・考え方を理解する。
- ・MIU語の証明問題を通じて、定理の価値を知る。

(2) 本時の展開

時間	学習内容・学習活動	指導上の留意点(☆留意点 ○学習支援)
導入 10分	1 数学は、自然科学とは考え方が異なる。 三角形の合同を示すのに、三角形を切り抜いて重ねてみるのはなぜだめ? 「ユークリッド原論」知っていますか? ● 掲示された図により、次の説明を聞く。 ① 数学と自然科学の違い。② 公理、公準から証明によって定理を導く。 ③ 公理が異なれば別の数学 → 自由性の獲得 ④ 公理系のとり方で、数学する空間が変わる。	☆ 興味深い話題が多いところではあるが、話が散漫にならないように、簡潔まとめて、展開に入る。
展開 35分	2 簡単な公理系を用いて数学本来の考え方を学ぼう。 μ語の公理系を掲示する。 【μ(ミュー)語の公理系】 (K1) MI は μ語である。 $MI \sim \mu$ と表す。 (K2) μ語が I で終わっていたら、最後に U をつけても μ語である。 (K3) M... が μ語なら、M を除いた部分を後ろにつけても μ語である。 (K4) μ語に「III」があれば、「U」に置き換えても μ語である。 (K5) μ語に「UU」があれば、消すことができる。 ● μ語の公理系を用居いて、次の問いを解いてみよう。μ語ゲーム開始。 問1 MIU が μ語であることを示せ。 問2 MIIIU が μ語であることを示せ。 ● 考える時間をとる。証明した生徒に説明をさせる。聞いている生徒からの質問も受けつける。 以下の2問についても同様に進めて行く。 問3 MUIU が μ語であることを示せ。 問4 MUIIU が μ語であることを示せ。 問5 MU が μ語であることを示せ。生徒に考えさせる。	○ 具体例を示しつつ、説明を加える。 ☆ 問1, 2 は、記号の使い方や証明の書き方について教えながら解説する。言葉で書くより記号で表した方が簡潔で明瞭であることを伝える。 ☆ 問3以降は、できるだけ生徒に考えさせて、黒板に解かせる。 ○ 生徒の様子によっては、問3、問4をまとめて取り組ませる。グループ対抗にしても良いかもしれない。 ☆ 別解をいろいろと探させてみる。 ☆ 証明は短い方が良いということを伝える。前問で証明したことを利用しようとする生徒出てくる可能性がある。それが「定理」であることを伝える。定理が論理の飛躍をもたらすという価値を押さえる。 ☆ 問5は実はこの公理系では証明できない。ある公理系では証明できないものがある。その「できないこと」の証明はどうするか。

まとめ 5分	3 問5は難問だ。●ヒントと次回までの課題について説明を聞く。 次回までに、問5の証明を考えてくる。 合わせてプリント裏面の課題を次回までにやってくることを伝える。	☆ 問5は宿題にする。時間があれば、ヒントを与えておく。
-----------	--	------------------------------

(3) 第2時間目の授業の概要

(4) 題材の留意点

①不可能性の証明

M=3, I=1, U=0 と置き換える。公理系が次のようになる。「(K1) 31 は μ 語である。(K2) μ 語が1で終わっていたら、最後に0をつけても μ 語である。(K3) 3...が μ 語なら、3を除いた部分を後ろにつけても μ 語である。(K4) μ 語に「111」があれば、「0」に置き換えても μ 語である。(K5) μ 語に「00」があれば、消すことが出来る。」このように μ 語を数字に置き換え、「語」を3で割った余りで分類することを考える。MI は 31 なので、3で割った余りは1である。MU は 30 なので余りは0である。上の K2~K5 の操作を 31 に施しても 3で割った余りが0になる数を作り出すことが出来ないことを証明すればよいことになる。その証明を中心に授業し、ゲーデル不完全性定理に簡単に触れる。

②作ってきた問題の発表や振り返りを行う。

15年ほど前、ダグラス・R・ホフスタッター著「ゲーデル、エッシャー、バッハ」の中で「MIU 語ゲーム」を見つけたとき、これを利用して授業がしてみたいと思った。なかなか手がつかず、その間、小島寛之氏の複数の著作に MIU 語ゲームが取り上げられていて、勉強させていただいた。とても分かりやすく解説されており授業づくりへの意欲が再燃した。公理系の練習だけではなくゲーデル数などにも近づく優れた教材であることも分かった。なお、本来は MIU (ミュー) 語ゲームであるが、MIU と書く手間を省くため、私が勝手に「 μ 」というギリシャ文字1文字をあてることにしたことを断っておく。

2-3 「折り紙の中の数学」 授業者 阿部 真由美

(1) 本時の目標 (ねらい)

- ・「折り紙公理」を紹介し、数学的に折る際にルールがあることを確認し、図形分野の既習事項を結び付けて理解する。
- ・折り紙公理を用いて正三角形を折ること・その折り方が数学的に正しいことを説明させることを通じて、知識を活用して数学的に考える態度、論理的に説明しようとする態度の基盤を養う。

(2) 本時の展開

時間	学習内容・学習活動	指導上の留意点
導入 15分	・本時と次回の授業では、折り紙で図形を数学的に折ることをテーマとする。 ・数学の授業で紙を折る際には、折り方のルールがある。 ・折り紙公理①～⑦について、折り目を記入したり、実際に紙を折ったりしながら確認していった。(プリント) ・今後の折り紙の授業では、①～⑦の折り方を用いて数学的に折る(作図する)ことを伝えた。 【折り紙公理】 ①与えられた2点を通る線で折る ②与えられた2点を重ねて、2点間の垂直二等分線で折る ③与えられた2本の線を重ねて、2線間の二等分線で折る ④与えられた1点と1本の線に対し、与えられた点を通る与えられた線の垂線を折る。 ⑤与えられた2点と1本の線に対し、一方の点が線に乗るように他方の点を通る線で折る。 ⑥与えられた2点と2本の線に対し、一方の点が一方の線に乗ると同時に他方の点が他方の線に乗るように折る ⑦与えられた1点と2本の線に対し、その点が一方の線の上に乗るように他方の線の垂線を折る	・一人につき5枚程度の折り紙を配布 ・4人程度のグループを作り、協力しながら取り組ませる。 (グループの中の一人ができたなら、他の3人と共有・説明するなどしてよい) ・④～⑦以降については、実際に折り紙で折りながら確認させた。 ●公理の意味を正しく理解して折れているか。 ●定規とコンパスの作図、これまで学んだ図形の性質(角の二等分線、垂線など)の知識と結び付けられているか ・⑥以外の折り方は、折り目をコンパスと定規で作図できること、⑥は作図できないこと(⑥の折り方は、3次方程式の解を求めることと同値)にも言及した。 必要に応じて、黒板に図を描きながら、折り目がどこにできたか生徒と確認していった。

展開 1 15 分	【正三角形を折る】 ・折り紙を使って、正三角形を折ってみよう。 ・完成形のイメージ（図）を確認する。 ・正三角形を作る過程で、いくつか補助となる折り目がつく。 ・正しく折れた人は、できるだけ折る回数が少なくなるような方法を考える。 ・折りあがった図形が、正三角形になるための条件を満たしているか。 ★グループにしたことで、最初は何から手を付けたらよいかわからない生徒も、協力しながら折ることができていた。できるだけ、折り目の数が少なくなるような折り方を考えるよう投げかけたところ、よく取り組んでいた。できた生徒に、折り方を発表してもらった。	・グループで協力し合うよう伝える。 ・公理にある折り方で折るよう伝える。 ・底辺の垂直二等分線上に頂点がかかることに気がつけるか。 ・コンパスで正三角形を描くイメージ ・グループ全員が行き詰っているようであれば、ヒントを与える。 ・大方の生徒が完成したあたりで、生徒に前で折り方を説明させる。 ・黒板に折り目の図を描いて、手順を確認する。 ・別解もあれば、発表してもらう。
展開 2 10 分	【正三角形を折る】 正三角形の向きを変えれば、さらに大きな正三角形が折れる。 ・完成形のイメージを確認する。 ・まずは個人で考え、その後、グループで協力してよい。 ★角度 15° の折り方に気が付いた生徒は、正三角形を折れていた。できた生徒に、折り方を発表してもらった。	・折り紙（正方形）の対角線に対称な図であることに気がつくか。 ・角度 15° に着目する。 ・【展開 1】で 30° の角が折れていること、角の二等分線を折ればよいことに気がつくか。 ・必要に応じて黒板の図で確認する。
まとめ と次回 に向け て	2 つの正三角形の折り方について、プリントの図を使って、記録しておく。 すべて折り紙公理に基づいて折り目をつけているので、何番を使ったか確認しておく。 次回は、正五角形にチャレンジすることを伝えた。	

(3) 第 2 時間目の授業の概要

正五角形を折る ①黄金比を定義し、比を求める。 ②黄金長方形を折る →折り図を提示して実際に折ってみたあとに、縦と横の比が黄金比になっていることを確かめる ③正五角形の中に現れる黄金比 →正五角形の 1 辺の長さとお角線の長さの比が黄金比になっていることを確かめる ④折り紙で正五角形を折る →折り図を提示して実際に折る。1 辺の長さとお正方形の 1 辺の長さの比を求め、③の結果と照らし合わせる。 課題 正三角形と正五角形のどちらかを選び、授業で紹介した折り方が正しいことを証明する。
--

(4) 題材の留意点

高校入学段階までで学んでいる定規とコンパスによる作図、平面図形の性質、2 次方程式の解を求めること等の最低限の知識を前提としている。それらを組み合わせることにより、苦手意識のある生徒でも思考錯誤しながら取り組めるような題材とした。公理⑥は、3 次方程式の解を求めることと同値であり、角の三等分折りにも用いられる興味深い部分ではあるが今回は踏み込まない。「数学的に折る（作図する）」操作を明確にするため、公理を紹介するのがよいと考えた。

3 研究協議にて

授業後の研究協議では、最初に学校設定科目「数学探究」の概要について説明した後、本時の 3 つの授業について担当者よりそれぞれコメントし、その後協議に入った。参加した先生方から、「生徒が悩み楽しむ姿に驚いた。」「挑戦的な取り組み」という感想をいただいた。また、通常の授業と「数学探究」で扱った内容をどう結び付けていくのか、いかないのか、などの質問も多くあった。今回の授業の内容は、それぞれ数学Ⅱや数学Ⅲ、大学で学ぶ内容につながる部分がある。2 年生、3 年生になったときに生徒が、内容を覚えているのかというと難しいであろう。ただ、「数学探究でやったよね。」というワンクッションがあることが生

徒の興味や理解にどう働くのかは観察していきたい。1年生で「数学探究」を受けた2年生は、何か変化があったか、という質問もいただいた。これについては、まだ2年目の科目で教員の実感でしかないが、今年度の2年生の様子から、数学に対する抵抗感や拒否感の減少があるように感じているし、それでよいと考えていると回答した。内容を先取りするというより、数学に対する前向きな姿勢や、粘り強く考える姿勢を育むことを目標としたい。また、夏休みに実施している「数学自由研究」について、今後、取り組もうとしている学校もあるとのことで質問があり、方法や生徒の研究内容について意見交換を行った。