

## 中学校数学科における言語活動の質的な充実 ～中1の指導に焦点を当てて～

横浜国立大学教育人間科学部附属横浜中学校 藤原 大樹

### I 理論

#### 1 数学科における思考力・表現力・判断力等について

数学科における思考力・表現力・判断力等はいわゆる「数学的な思考力・表現力」であり、国立教育政策研究所（2011）における「観点「数学的な見方や考え方」の趣旨」を基に、「事象を数学的に捉えて直観的・論理的に考察し表現したり、その過程を振り返って考えを深めたりする力」の総体として捉えられる。これは与えて身に付くものではなく、論理的に考えたことを数学的な表現を用いて表したり、数学的に表現されたものの意味を解釈したりすることを繰り返すことを通して、段階的、漸次的に身に付けていくものである。

例えば『解説』で、数学的活動ウ「説明し伝え合う活動」について、第1学年では「表現の簡潔さや形式などにとらわれ過ぎず、生徒が自分なりに説明し伝え合うことを重視」しているのに対し、第2、3学年では「洗練され、より実質的なものになるように、根拠を明らかにし筋道立てて伝え合う」ことを目指している。つまり、生徒の状況を踏まえ、学年ごとで段階的に重点を変えて徐々に身に付けられるようにしているのである。

そこで本稿では、「数学的な思考力・表現力」の育成に向けて言語活動の質を高める上で効果的な工夫として、中長期での段階的指導を提案する。この「中長期」とは中学校3年間、学年の1年間、単元内、小単元内を意味し、「段階」には学年や発達の段階、思考方法や表現方法に係る学習の進行の段階などを含む。なお、附属横浜中学校（2011）ではその工夫について、主に評価の視点から提案しているため、ぜひ参考されたい。

#### 2 数学科における言語活動の質的な充実

言語力育成協力者会議（2007）や文部科学省（2008）を参考に、数学的表現、説明・証明の質と量、数学固有の論の進め方という観点から次の段階的指導が有効であると考えた。

##### （1）数学的表現の質を段階的に洗練させる。

生徒の発達や学習の進行などを踏まえ、はじめは数学的に稚拙な表現であっても、生徒同士で建設的に批判し合うことで、目的意識をもって相手に伝わりやすい的確な表現に洗練・改善していくことが大切である。そのための視点として、例えば次のものが考えられる。

①相手により伝わりやすい別の数学的表現や、より簡潔で的確な数学的表現、より目的に沿った的確な数学的表現を用いて説明できるようにする。

例えば、「三角形ABCと三角形DEFが合同である」という表現を、記号を用いた「 $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ 」という表現に洗練させる。「錯角が等しいので」という説明を「平行線の錯角が等しいので」と的確な説明に改善させる。個数の異なる2つの集団の傾向を比較する際、2つのヒストグラムを用いた説明を、2つの相対度数折れ線を重ねて用いた説明に改善させる。これらを生徒同士でさせる。

②事柄・事実の説明では「前提・根拠」と「結論」、方法・手順の説明では「用いるもの」と「用い方」、理由の説明では「根拠」と「結論」の両方を説明できるようにする。

例えば、帰納的に予想した事柄を説明する場面では、「奇数の平方から1ひくと、8の倍数になる」という命題の形で表現することが、考察対象を明確に捉えるために大切である。はじめは手厚

く指導し、その意義を感じさせることで、学年段階を追ってそれほど指示せずとも的確に説明できるようにさせたい。

**(2) ワークシートや授業展開を工夫し、説明・証明の質を保ちながら量を段階的に増やす。**

例えば、考えの一部を説明する空所補充型のワークシートから始め、考えたことを漸次的にたくさん書けるようにしていくことが考えられる。なお、文部科学省（2011）における「ワークシートを活用し、2つの数量の関係について変化や対応の様子を説明する事例」もこれにあたる。ここでは相手に説明する際、話し手も聞き手も考えの誤りや不足に気付きやすいと報告している。

また、数学的活動の後に条件を一部変えた問題を考え、その成果をレポートする展開にすると、基になるものがあるため自信をもって取り組み、原題の構造の理解がいつそう深まる。

**(3) 形式的な論の進め方を表現できるように、その素地を意識して段階的に指導する。**

数や図形の論証は数学独自の形式に基づいた記述言語であり、固有の論の進め方を行うため、抵抗感を抱く生徒が少なくない。そこで、機会を見だし、次の素地的な指導を行う。

**①文字を用いてとらえ説明できるよう、目的に応じて主体的に表したり読み取ったりする。**

生徒に文字のよさを実感させるためにも、例えば、見いだした数のきまりがどんなときでも成り立つことを確認するために文字を用いるなど、その目的を明確にとらえられるようにする。

**②考察したことを的確に表現できるよう、構想を立てたり証明を読んだりする。**

図形の証明では、遡行して考えることで証明を進められるように、結論や合同な三角形などを整理してから証明をかかせる。また、証明を読むことで固有の形式にも慣れてさせていく。

**③「 $A=C$ ,  $B=C$ , よって  $A=B$ 」という論の進め方を用いて、事柄が正しいことを説明する。**

この論の進め方を、中2「文字式の説明」の学

習の前に素地的に指導する。例えば一元一次方程式  $2x+16=10$  の解の正誤を代入して確かめる場面で、「 $2x+16=10$ ,  $x=-3$  を代入して、 $2 \times (-3)+16=10$ , …,  $10=10$ 」ではなく、「(左辺) = … = 10, (右辺) = 10, よって(左辺) = (右辺)」, 「(左辺) = … = 10 = (右辺)」と書かせる。

**④反例をあげるといふ論の進め方を用いて、事柄が正しくないことを説明する。**

例えば、次の場面で反例の有無を意識させる。

- ・「 $-3a$  は負の数である」の真偽
- ・「合同な図形の対応する角はそれぞれ等しい」の逆の真偽,
- ・「 $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$ 」などの真偽
- ・表から立てた関数式や一般式の正誤 など

### 3 まとめ

生徒が自立的に言語活動に取り組めるように、どのような段階を踏むべきかについて中長期で検討しておく必要がある。このことに加え、数学科における言語活動については、特に数学的な表現や数学固有の論の進め方を用いることができるように留意すべきである。実際の授業では、生徒の声や記述を即時的に受け入れるのではなく、受け止めて全体に返す姿勢を大切にし、生徒の多様な考えを生かしていくことは言うまでもない。

#### 【参考文献】

- ・国立教育政策研究所（2011）「評価規準の作成、評価方法等の工夫改善のための参考資料【中学校数学】」。
- ・横浜国立大学教育人間科学部附属横浜中学校編（2011）『思考力・判断力・表現力等を育成する指導と評価』, 学事出版, pp. 46-53.
- ・言語力育成協力者会議（2007）「言語力の育成方策について（報告書案）【修正案・反映版】」。
- ・文部科学省（2008）「中学校学習指導要領解説 数学編」。
- ・文部科学省（2011）「言語活動の充実に関する指導事例集【中学校版】」。

## II 実践1

### 1 小単元名

・一元一次方程式の利用

### 2 言語活動を通して身に付けさせたい力

・具体的な問題の解決に一元一次方程式を活用して考える力

### 3 指導の実際(2時間扱い)

#### (1) 学習課題

**第5時** 5円玉を手を持って腕を伸ばすとその穴から満月が見えるか。(島田, 1990)

目から5円玉の穴までの距離を50cmとすると、5円玉の穴の直径は0.5cmなので、場面を二等辺三角形で表現し、頂角を $x^\circ$ として求め、月の視角 $0.5^\circ$ と比較すればよい。しかし一元一次方程式が立たない。そこで図1のおうぎ形で近似して

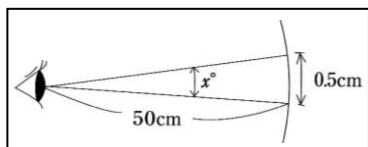


図1 おうぎ形のモデル

比例式 $x:360=0.5:(2 \times 50 \times \pi)$ を立て、 $x \approx 0.57 > 0.5$ より満月は見える。なお、二等辺三角形の頂角が微小なため、おうぎ形で近似して

も大きな支障はないと考えられる。

**第6時** 50円玉を手を持って腕を伸ばすとその穴から満月が見えるか。

目から50円玉までの距離を各自で設定し、50円玉の穴の直径0.4cmを用いて解決した過程をレポートにまとめる。

#### (2) 学習のプロセス

- ①過不足の問題の算術的な解決方法と方程式を用いた解決方法を対比させ、後者のよさを理解する。(第1時)
- ②速さの問題と遊園地の入園料金の問題で、立式のために問題文の数量関係を表にまとめるよさを理解する。(第2時)
- ③方程式を用いて具体的な問題を解決する手順を短文でまとめ、実際に問題を解決できるか、小

テストで確認する。(第3時)

- ④ミルクティーの原料比の問題で、比例式を立てたり解いたりする方法を見いだす。おうぎ形の弧の問題に応用する。(第4時)
- ⑤5円玉の問題を取り上げ、場面を別の図形に近似することで比例式を立てて解決する。近似の是非を議論する。(第5時:本時)
- ⑥前時から条件を変え、問題を解決する過程をレポートにまとめる。(第6時:本時)

#### 4 言語活動の質を高める工夫と活動の実際

数学的活動イを実現し、その成果をレポートさせるための6つの工夫を中心に報告する。

##### (1) 本時の問いを生徒の言葉で明文化する。

第5時では、まず問題を提示し、5円玉を手にとって結果を予想した後、問題場面を表す絵を示した。目から穴までの距離を50cmと設定し、月の視角 $0.5^\circ$ を提示した上で、見通しについての生徒たちの発言をつなぎ合わせて「5円玉の穴を見る視角を $x^\circ$ として方程式を立てて解き、これが月の視角 $0.5^\circ$ よりも大きいかどうかを調べる」という文をつくり、強調して板書した。考察の対象が明確になり、活動の見通しが立てられた。

##### (2) 利用できそうな既習の知識・技能をノートやファイルで探し、話し合わせる。

問題場面を既習の図形に表現するように指示し、個別解決に取り組んだ。ほとんどの生徒は頂角 $x^\circ$ 、高さ50cm、底辺0.5cmの二等辺三角形で表現したが、「方程式がつかれない」という声があちこちで聞こえるようになった。そこで「何か利用できそうな知識や技能はないかノートやファイルを見て探し、4人グループで話し合おう」と投げかけた。すると、第4時で扱ったおうぎ形や比例式を利用する考えに徐々に気付いていった。

##### (3) 話し手も聞き手も相手意識をもたせる。

机を元に戻し、おうぎ形の考えを見いだした生徒に黒板の前で発表させた。その際、国語科で学習したように、話し手には相手が表情を見たり途

中で区切ったりしながら話すように、また聞き手には相槌や質問など反応するように助言した。おうぎ形についてあいまいな点を他の生徒が補うなどのやり取りの後、「半径 50cm, 弧が 0.5cm のおうぎ形で表現したら方程式が立てられるのでは…」という考えに到達した(二等辺三角形と同じ面積のおうぎ形で考える生徒もいた)。その際「それっていいの?」というつぶやきも聞かれたので、「その疑問は後にとっておいて、とりあえずおうぎ形で表現して  $x$  が求められるかをまず考えてみよう」と指示した。

#### (4) 近似してもよいかどうかを議論させる。

各自がおうぎ形をノートにかき、比例式を立て、 $x \approx 0.57$  という解を得ていた。「月が見えない」と答えている生徒には、解の解釈を再度させた。全体で式と答えを確認した後に疑問などがあるかと問うと、「実際と違う図形で表すと答えが変わるのではないか」という発言があった。同じ疑問をもつ生徒は全体の 3分の1 程度いた。「この疑問を解消するよい考えはありませんか」と問うと、「視角がととも小さいから二等辺三角形もおうぎ形もすごく細くなって、図形としてほぼ変わらないと思う」という考えが出され、多くの生徒が「そういうことか」と納得していた。小学校の円の求積の学習と関連付ける生徒もいた。

#### (5) レポートの意義を感じさせ、前時の活動を基にすることで自信をもたせる。

第 6 時では 5 円玉を 50 円玉に変え、目から穴までの距離は各自で設定して、レポートにまとめさせた。第 5 時の学習を深めることが主たるねらいであることを生徒に伝え、第 5 時のノートを参考に記述させた。

#### (6) レポートにまとめる留意点を明示する。

レポートを書く際、次の点に留意させた。

- ・設定した条件や仮定を明記する。
- ・その条件や仮定を設定した(してもよい)理由を明記する。

これにより、生徒にとって数学的モデルの有効性

と限界が明確になり、活動を振り返り、さらに他の場面に発展させやすくなる。また、授業者にとっては、机間指導等の際に生徒の思考過程を読み取りやすくなった(図 2)。

問題 50円玉を手にとって目を伸ばすと、その穴から満月は見えるでしょうか。

条件  
 ① 月玉の直径 0.4 cm  
 ② 目から50円玉までの距離 50 cm  
 ③ 月の視角 0.5度

図1  
 (Diagram showing a triangle with a vertical side of 50 cm and a horizontal base of 0.4 cm.)

図2  
 (Diagram showing a circular sector with a radius of 50 cm and an arc length of 0.4 cm.)

50円玉の視角を求めて、0.5度より大きければ見えるので、50円玉の視角を求めてみる。  
 まず、図を書く。(図1) このままでは、 $x$  を求めることができない。図1をもう少し大きくして考える。(これは  $x$  がかなり小さいために直線でも曲線でも差はない(仮定を理想化) 図2。  
 図2と全体の円の関係を比例式で表すと、  
 $360 : x :: 314 : 0.4$   
 (角度) (円周、弧の長さ)  
 $314x = 149$   
 $x = \frac{149}{314}$   
 $x = 0.45\dots$   
 50円玉の視角は0.45度。0.5度より小さい。  
 つまり、50円玉の穴から月全体を見ることができない。A、見えない

図 2 生徒のレポート

授業の最後にグループで共有して、記述の不足などを指摘し合い、加筆・修正させた。

## 5 評価

次の問題で評価して記録に残すこととした。

50円玉を手にとってその穴から月を見ると、目から何 cm 離すと穴からちょうど穴からぴったりと月が見えるか。

問題の構造は授業と同じだが、文字で置く数量を考える必要がある。計算過程や答えが正しいだけでなく、上記の留意点を的確に記述している生徒を「十分満足(A)」とした。

### 【参考文献】

- ・島田茂 (1990) 『教師のための問題集』, 共立出版, p54.

### Ⅲ 実践2

#### 1 小単元

- 空間図形の平面上への表現と読み取り

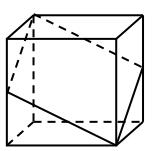
#### 2 言語活動を通して身に付けたい力

- 空間図形を平面上に表現したり，平面上の表現から空間図形の性質を読み取ったりする力

#### 3 指導の実際（3時間扱い）

##### (1) 学習課題

**問題** 立方体を右図のように半分に切断した立体の展開図をかき，実際に作りなさい。ただし，切り口をふさぐ“ふた”も作ること。



上記の問題（近藤他，2011）を取り上げる。点J，Lは各辺の midpointである。立体の展開図を正確に作るためには，生徒は投影や展開，切断などの操作を相互に関連付ける必要がある。特に，ふたがひし形になる根拠を考察する際，図3の平面AEGCや平面IJKLに着目し，平面図形で学習したように記号を用いて説明することになる。なお，ふたの考察には「対角線が垂直に交わる四角形はひし形である」などの条件が必要であるが，本時では小学校算数科での直観的な理解を基にした扱いとし，演繹的な考察は中2の学習で行うこととする。

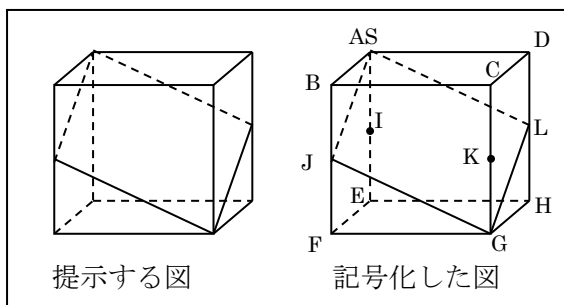


図3 立方体を切断した立体

##### (2) 学習のプロセス

- ①正八面体における辺や面の関係について考察することを通して（図4），空間における直線や平面の位置関係の理解を深める。（第0時）
- ②回転体と投影図について，基本的な知識・技能

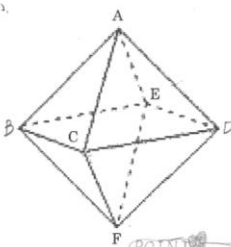
について習得する。（第1時）

Fy-MATH 2月16日(木)

### 空間における位置関係

1年

問題 右の正八面体について，次の問いに答えなさい。ただし，各面を平面とみなします。もしなければ「ない」と答えなさい。



- (1) BCとCDの交点を答えなさい。  
点C
- (2) 平面ABEと平面FBEの交線を答えなさい。  
線分BE
- (3) 平行な2つの線分の組を記号//を用いてすべて答えなさい。  
BE//CD AB//DE  
BC//DE AC//CF  
AD//BF AE//CF  
AC//EF
- (4) 平行な2つの面の組を，記号//を用いてすべて答えなさい。  
 $\triangle ACD // \triangle BEF$   
 $\triangle ABC // \triangle EDF$   
 $\triangle ABE // \triangle CDF$   
 $\triangle AED // \triangle BCF$
- (5) 垂直な線分の組を，記号⊥を用いてすべて答えなさい。  
BC⊥CD AE⊥FE  
CD⊥DE AF⊥CD  
DE⊥EB AF⊥BC  
LE⊥BC AF⊥BE  
AB⊥BF AF⊥FD  
AC⊥CF AF⊥CE  
AD⊥DF AF⊥BD
- (6) 垂直な平面と線分の組を，記号⊥を用いてすべて答えなさい。  
AE⊥BCDE  
BF⊥ACFE  
CE⊥ABFD

POINT  
平面に着目して，方向を決めて見よ  
↓  
投影的に見よ

図4 第0時のワークシート

- ③投影や展開，切断などの操作を相互に関連付けて，立方体を切断した立体づくりに取り組む。（第2～4時：本時）

#### 4 言語活動の質を高める工夫と活動の実際

##### 【第2時】

- (1) 提示された見取図から問題を理解させる。

立方体の見取図を黒板に貼り付け，2つの頂点と2つの辺の midpointの4つにマジックで色を付け，「この4点を通るように切った立体をつくっても

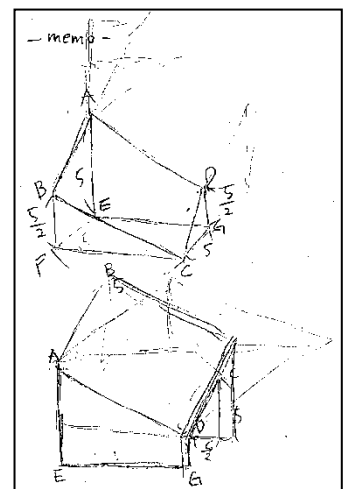


図5 Mc生が書いた見取図

らいます。」と伝え、黒板に問題を書いた。その後、立方体の一边は5cmであること、ふたがくつついた展開図を作ること、方眼の付いた工作用紙でつくることを伝えた。工作用紙とワークシートを配付し、ワークシートには展開図の下書きや考えたことのメモ、あるいはイメージしづらい場合には切断後の立体の見取図を記すなど、自由に使うように伝えた。その後、周囲と話し合わずに個人で展開図を考えるように指示した。

(2) 課題を見だし、個人で考えさせる。

考え始めると、数分すると、「ふたがわからない」とつぶやく生徒が出始めた。ふたの形についての問いを全体的に抱いてきた雰囲気を察し、一旦活動を止めさせて、「何か困っていることがあるのかな?」と問うたところ、「ふたの形がわからない」と言い始めた。「ふたの形は何になるの?」と聞くと、口ぐちに「長方形」「平行四辺形」「ひし形」「正方形」と言う生徒たち(図6, 7)。その際、

それぞれがどのような四角形なのかを軽く触れて、小学校算数科での学習に基づくこれらの区別について確認した。「では、ふたの形がどのような図形になるのか、みんなで考えていきましょう。」と課題を焦点化して板書し、まず個人で15分ほど考えさせた。ワークシートには、ふたの図形、及びその理由を記述するように指示した。生徒たちは黙々と考えていった。

なお、ある生徒が「図にアルファベットを振ってもよいですか。」と聞いてきたので、「後で記号が共通だと理解しやすいから」と共通の記号として頂点A~Jを置いた。このように必要に応じて文字や記号を置く展開は、文字式や方程式、関数、平面図形の学習で行ってきている。

机間巡視する中で、対角線を引いて説明を書く者、角度に着目して説明を書く者などがいること

2月18日(土)

### 切断立体をつくらう!

1年

**問題** 立方体を右図のように半分に切断した立体の展開図をかき、実際に作りましょう。ただし、切り口をふさぐ“ふた”も作ること。

**条件** 1. 辺5cm, 2. 辺の中点を通る

**予想図**

ふたの形はどのような図形になるだろうか?

<図形> 正方形だと思う。

<理由> なぜ正方形だと思うのかというと、線分CIと線分IA、線分AJ、線分JGの長さは全て等しいと気づいたのである。全ての線分は、どれも立方体の頂点から、中心に向かって線をついたものと同じ長さだと考えられる。だから、AEGJは正方形だと思う。

よって、 $\triangle AIB$ ,  $\triangle ABL$ ,  $\triangle ILG$ ,  $\triangle JGH$  はすべて合同である。

よって、対角線の長さが等しいと気づいたと証明しよう。

よって、AGとJIの長さは等しいと考えられる。

ひし形

よって、AGとJIの長さは等しいと考えられる。

よって、AGとJIの長さは等しいと考えられる。

図6 正方形と予想したN生のワークシート(表)

2月18日(土)

### 切断立体をつくらう!

1年

**問題** 立方体を右図のように半分に切断した立体の展開図をかき、実際に作りましょう。ただし、切り口をふさぐ“ふた”も作ること。

ふたの形はどのような図形になるだろうか?

**予想**

長方形  
平行四辺形  
ひし形  
正方形

<図形> ひし形

<理由>  $\triangle ABI$ と $\triangle ADJ$ と $\triangle GFI$ と $\triangle GHJ$ は、1辺が2.5cm、もう1辺が5cmの合同な直角三角形だといえる。切り口をつくっている4つの辺は、それぞれこの三角形の長さがおなじい辺であるため、すべて同じ長さだといえる。

また、AIGJが対角線の1本であるIJ

図7 ひし形と予想したSe生のワークシート(表)

を確認した。

### (3) ふたの形とその理由を2人組で話し合う。

15分ほど個人で考えさせた後、隣同士の2人組で考えを説明し合う機会を5分間設けた。生徒たちは堰を切ったように話し合いを始めた。隣同士でも納得できなかつたら、前後の生徒とも話し合ってみるように伝えた。その中では、「そういうことか。」と納得を得る生徒や「逆に何が合っているのかわからなくなった。」と問いが膨らむSi生のような生徒がいた。そこで、「それではみんなで考えていきましょう。」と伝えて、正方形であることを主張していたあるIc生を指名し、ワークシートを電子黒板に実物投影させて全員の前で説明させた。彼は、「正方形の半分の長方形の対角線であることから、四辺の長さが等しいこと」及び「ある頂点からちょうど辺の中点を通して反対側の頂点へ行くことから、すべての角は $90^\circ$ であること」を根拠にして、ふたが正方形になると説明した。

Ic生の説明に対して全体に意見を求めると、Kn生が挙手した。指名して前に出させると、まず黒板に貼ってある立方体の見取図に色マジックで、四角形の対角線、AEの中点K、CGの中点L、四角形KILJを書き入れた(図7)。そして彼は、「正方形の半分の長方形の対角線であることから、四辺の長さが等しいこと」及び「IJは立方体の1つの正方形の面の対角線で、AGは立方体の対角線であること」を根拠にして、ふたの形がひし形であると説明した。教室は納得という雰囲気が漂い、2人組の説明の時間には「わからなくなった。」と言っていたSiに意見を求めると、「さっきはわからなかったけど、Kn生の説明を聞いて納得しました。」と答えた。また最初に説明したIc生に意見を求めると、「実は僕が説明している途中で、何か違うな…と自分で気付いた。その違和感をKn生が引き継いでくれたので、よかったです。」と全体の前で答えた。

その後、納得した人と聞くとほとんどの生徒が挙手したが、3人手を挙げていない者を見つけた

ので、そのうちの1人Mc生に理由を聞いてみた。するとMc生は「立体では $IJ \neq AG$ でないことはわかったが、展開図にすると $IJ = AG$ になってしまうので、それがどうしてなのかわからないです。」と答えた。同様の悩みを抱えている生徒を挙手で聞くと、先ほど挙手していなかった残りの2名を含めて5名ほど挙手した。これを受け、黒板に「展開図では $IJ = AG$ になる」と意図的に書き、次時でみんなで考えていくべき課題として残した(図7)。その前の机間指導では四角形AIGJの内角の大きさに着目していた生徒もいたが、これも次時に取り上げることにした。

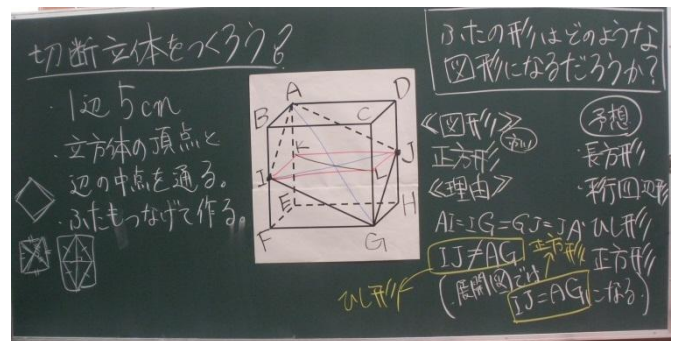


図7 板書(左下の図形3つは授業後に記入)

### 【第3時】

第1時でKn生から $AG \neq IJ$ である根拠が示されたが、まず別の説明ができる人はいるかどうかと問いかけた。するとKs生が挙手し、黒板に $\triangle AEG$ を書き、「もし $IJ = AG$ だとすると、 $IJ = EG$ なので $\triangle AEG$ は $AG = EG$ の二等辺三角形になる。「二等辺三角形の底辺のところの角(底角)は同じ角度になる」と小学校でやったから、 $\angle GEA = \angle EAG = 90^\circ$ おとなり、そうすると三角形の角の和が $180^\circ$ 以上になって矛盾が生じるので、 $IJ = AG$ はおかしいことになる。」と説明した。生徒たちは納得の様子で、授業者から、Ks生の説明は背理法という論理の組み立て方であることを紹介した。

### (4) 見取図と展開図での長さを考えさせる。

次に、第2時の最後のMc生の疑問を受け、「展開図上で $AG = IJ$ となるのはなぜか。」と板書して5分ほど個人で考えさせた。すると、机間指導している際に、「私の展開図では長さが等しくなりま

せん。」とOk生が言ってきた。

全体で発表を求めると、挙手したうちの1人であるKs生を指名し、「例えばAGだと、展開図にしたときのAGは、面上をつたって点Aから点Gまでいくときの最短距離を表しているのだから、空間上の最短距離、つまり線分AGを表しているわけではない。だからIJ=AGに展開図上でなくても、空間上ではIJ≠AGであることに問題はない。」と説明した。続いて、Okを指名してワークシートを電子黒板に実物投影し、異なる展開図においてはIJ=AGとならないことを説明させた。さらには、「展開図が同じでも、別のIJの結び方をするとIJ=AGにはならない。」と説明する生徒もいた。このことをMc生は図9のように記述している。

続いて、「前の授業では触れられなかったが、四角形の角（内角）がすべて90°と考えていた人もいたと思います。90°ではないのでしょうか。」と

展開図上ではAG=IJとするのはなぜ？

この時のAGの長さは... AMとMGの長さの和。  
よって、平面上のAGと立体上のAGは違うということになる。

作図の仕方

- ① この形の対角線であるABは、底面の対角線であるCDと長さが等しいので点Bから線分CDの長さの弧をかき。
- ② ①で、この形は4辺の長さがすべて等しいので点Eから半径が線分EBの長さの弧をかき。
- ③ 交わった点と点Bを直線でおく。
- ④ 点A、点Bから半径が線分AEの長さの弧をかき。
- ⑤ 2つの弧が交わった点から点Aと点Bに直線をおく。

図9 Mc生のワークシート（裏）

全体に問いかけた。すると、ある生徒は実際に教室の角に黒板用の定規を斜めに当て、90°にはならないことを示す生徒がいた。しかし納得できない生徒もおり、そのことを共有して改めて第3手で全体で考えることにした。

(5)ふたの内側の角度について模型で考えさせる。

【第4時】

全体に投げかけると、近くの生徒同士で話し合いながら考えていった。しばらくして考えを問うと、図11を黒板に書き、「 $\angle BAD=90^\circ$ であるところから、点D、Bをそれぞれ点J、Iに下げていくと、角度がどんどん小さくなり、さらにずっと下げていくと0°に近づいていくので、 $0^\circ < \angle IAJ < 90^\circ$ になるはずである。」とOs生が説明した。生徒の中には理解できた生徒と理解できない生徒が混在していたため、理解を深めるために4人組

この形は？

ひし形になる。  
なぜなら...  
4辺が等しい  
(AI=IG=GJ=JA)  
対角線が等しくない。  
(AG≠IJ)  
正方形EFGHの対角線EG

見方方向を決めてみる  
→ 投影的な見方

EG=AGならば...  
矛盾が生じる。  
だから前提がおかしい。  
はい、その背理法。

この形のかき方 → を中心に

- ① Iの部分... 正方形のFGHEの長さをコンパスで弧をかき、弧をかき。
- ② Aを中心にしてIAの長さを

図10 Se生のワークシート（裏）



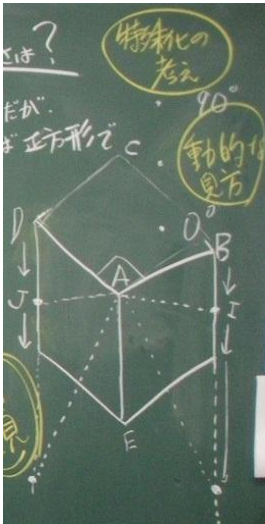


図 11 板書

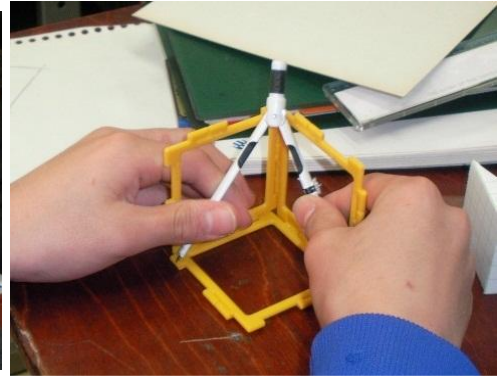
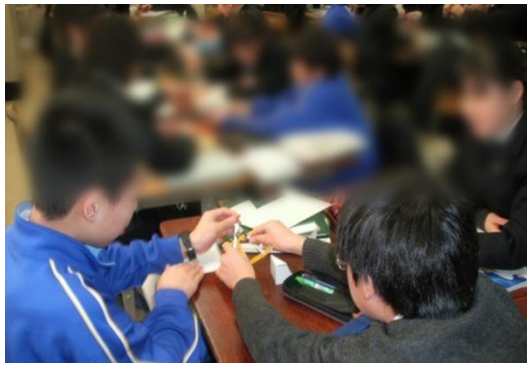


図 12 4人班でポリドロンにコンパスを当てて理解を深める

になって互いに 0s 生の説明の解釈を話し合わせた。必要に応じてポリドロンを渡すと、コンパスを当てて説明し始める生徒たちも現れ、納得の輪が広がっていった (図 12)。

(6) 展開図完成に向けて作図方法を考えさせる。

第 3 時の後半に、作図の方法について取り上げた。時間が押してきていることから、ひし形(菱形)の作図ではひし形を対角線で 2 つの三角形に分けて、その辺の長さからコンパスで作図できることを早めに生徒に説明させた (図 13)。これを基に、生徒は個人で作図を苦労しながら進めていった (図 14)。

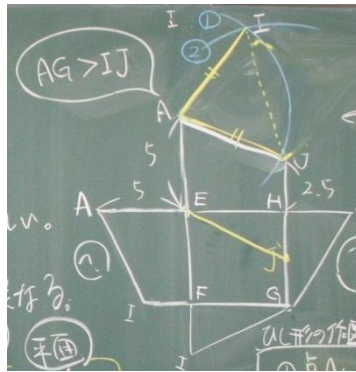


図 13 作図方法の板書

作図方法を全体で再度確認し、個人で作図を進め、組み立てていった。図 12 のように失敗する生徒もたくさんいたが、新たな工作用紙を受け取り、再度チャレンジしていった。次々と生徒が完成させた。

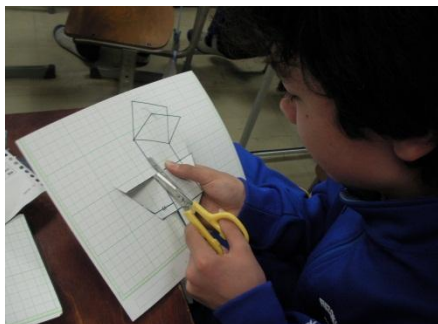


図 14 ふたを 2 重に作図

シートに加筆・修正を加えさせて授業を終えた。

【参考文献】

- ・ 國宗進 (代表) (2007) 「小学校算数, 中学校数学, 高校数学の接続を重視した幾何教育の改善に関する研究」, 平成 16~18 年度科学研究費補助金 (基盤研究 (C)) 研究成果報告書.
- ・ 近藤裕・國宗進・熊倉啓之・八田弘恵・望月美樹 (2011) 「空間図形についての理解に関する研究 - 立体の切り口の授業を通して -」, 第 44 回数学教育論文発表会論文集, pp.489-494.

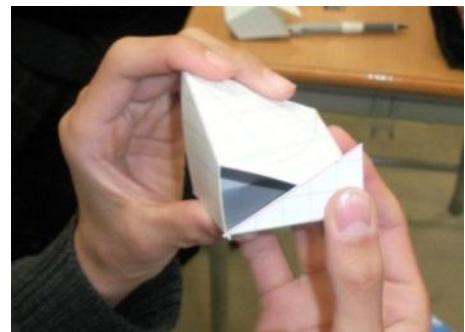


図 15 失敗した模型



図 16 正しくつくれた展開図