テーマ「常用対数の近似値」

私立豊島岡女子学園中学校高等学校
数学科　栗本　剛史

実践概要

2020 年 4 月より新型コロナウイルスの影響により通常授業が行えず、日々動画および資料の配信による授業を行ってきた。結局、高校 2 年生では数学Ⅱの指数関数・対数関数の単元をすべてこの形態で学習させることとなった。対数関数に関しては 9 時間計画とし、本実践はその 9 時間目に当たる。

一方的な配信授業で、生徒の定着度もつかめない状況の中、課題を課さなければならず、内容を検討していたところ、本データベースの「数学Ⅱ　常用対数の力」に出くわし参考にさせていただくこととした。

前時にたまたま「数学Ⅱ　常用対数の力」の授業実践同様、2 の 31 乗について考察してあった。その際に説明したことや練習問題に取り組んだという背景から、本時は真数が 1 ケタの常用対数を求める方法から入り、その中で真数が 7 の常用対数の評価をするという流れを組んだ。

平時であれば、板書で説明することや、評価例を議論させる授業の流れが組めそうであるが、その状況になかったため、ある程度個の力でも取り組める誘導をした。

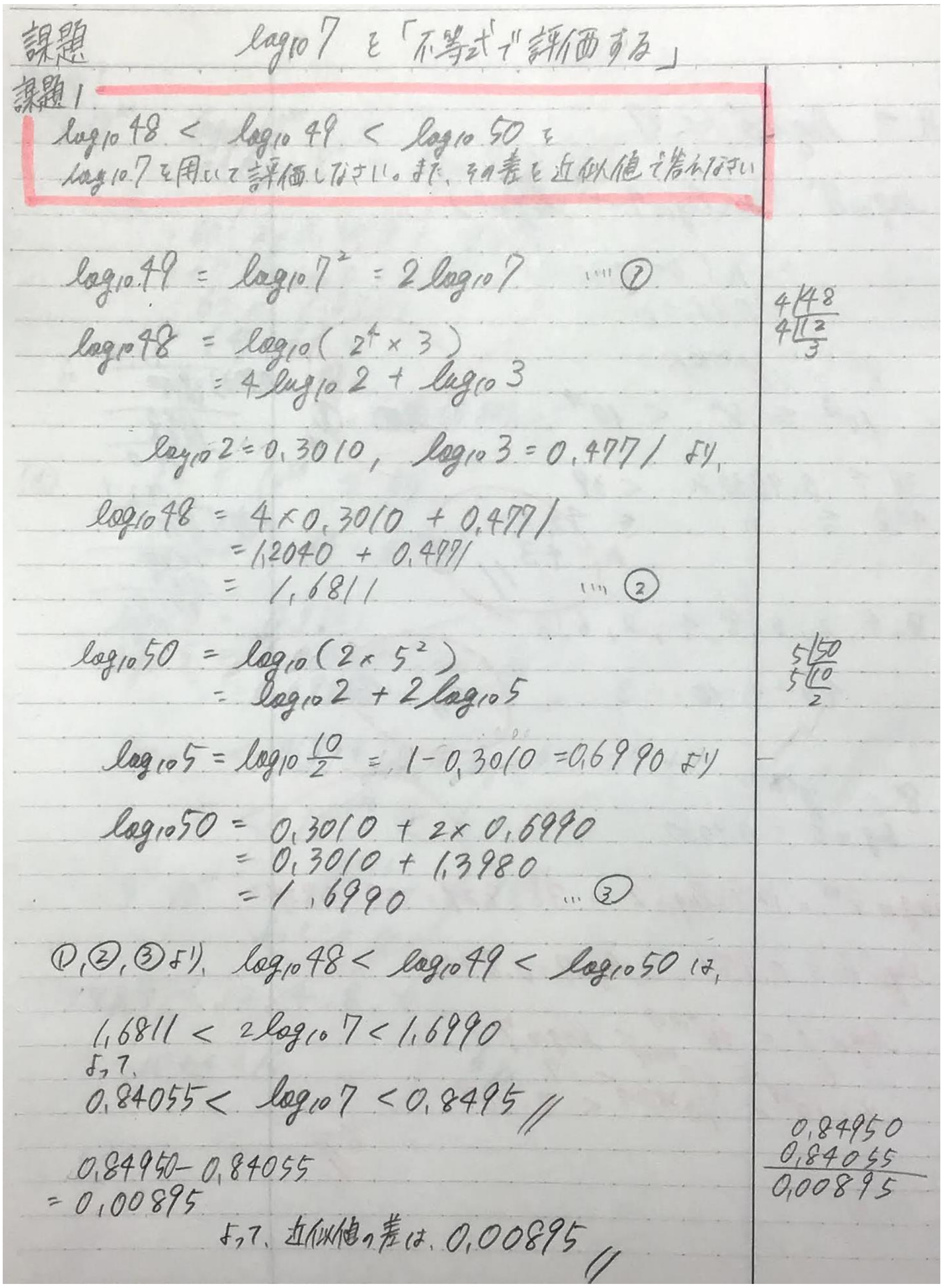
評価する値を考える方法として、協議会で挙げられていた分数を利用して精度を高める方法は参考にさせていただき、誘導にも組み込んだ。

実践した感想

無理数の学習では本来、その値の意義や求め方を知るべきだが、数学では記号化することで知らなくても扱える数になっている。また、計算に要する時間等に個人差があるため、時程が決められている通常授業では扱いにくい面もある。最後に掲載した生徒たちの感想にもあるが、これらの点を解消できたという意味では家庭学習という環境をうまく逆用できたと感じている。さらに、感想にあるように自ら必然性を感じて計算することが体感できたようであり、与えられた単問計算では身につかないものを得られたように感じる。

実践詳細

まず、課題１に取り組ませることにより、方法の確認を行わせることおよびこれよりも高い精度を目指す指標とした。本来精度が高くなることは、実際の値に近づくことを指すが、今回は log7 の値を調べさせることが目的ではなかったため、実感させる方法として、近似値の差を求めさせた。



課題　$\log_{10}7$ を「不等式で評価する」

課題1

$\log_{10}48 < \log_{10}49 < \log_{10}50$ を $\log_{10}7$ を用いて評価しなさい。また、その差を近似値で答えなさい

$\log_{10}49 = \log_{10}7^2 = 2\log_{10}7$ …①

$\log_{10}48 = \log_{10}(2^4 \times 3)$
$= 4\log_{10}2 + \log_{10}3$

$\log_{10}2 = 0.3010$, $\log_{10}3 = 0.4771$ より,

$\log_{10}48 = 4 \times 0.3010 + 0.4771$
$= 1.2040 + 0.4771$
$= 1.6811$ …②

$\log_{10}50 = \log_{10}(2 \times 5^2)$
$= \log_{10}2 + 2\log_{10}5$

$\log_{10}5 = \log_{10}\frac{10}{2} = 1 - 0.3010 = 0.6990$ より

$\log_{10}50 = 0.3010 + 2 \times 0.6990$
$= 0.3010 + 1.3980$
$= 1.6990$ …③

①, ②, ③より, $\log_{10}48 < \log_{10}49 < \log_{10}50$ は,

$1.6811 < 2\log_{10}7 < 1.6990$

よって,

$0.84055 < \log_{10}7 < 0.8495$ //

$0.84950 - 0.84055$
$= 0.00895$

よって, 近似値の差は, 0.00895 //

$4\underline{)48}$
$4\underline{)12}$
3

$5\underline{)50}$
$5\underline{)10}$
2

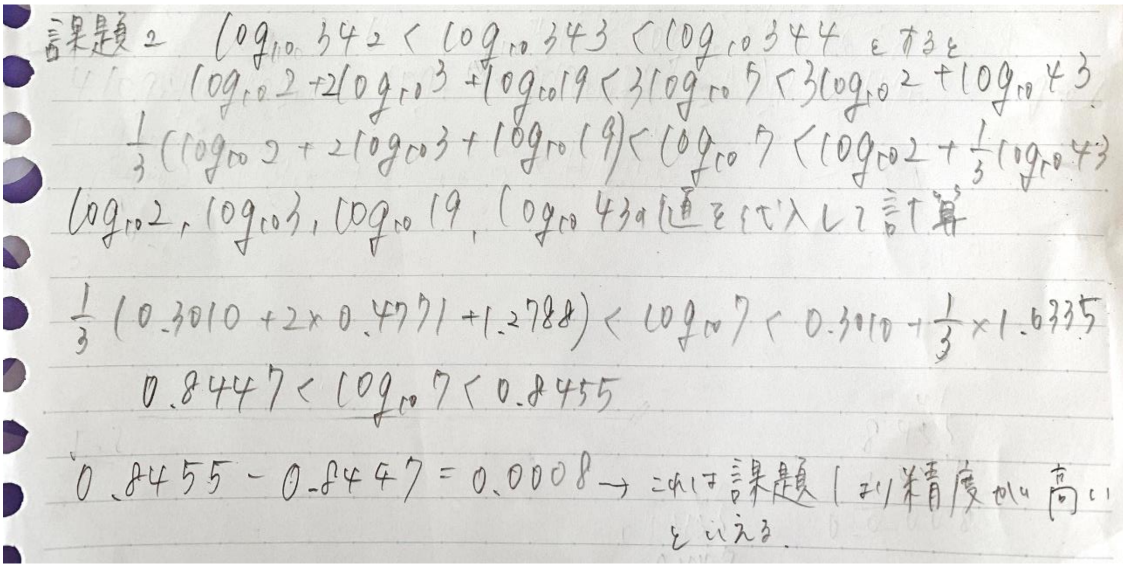
0.84950
0.84055
0.00895

約９割の生徒が正しい計算をすることができた。

課題 2

課題 1 で $49=7^2$ という方向性を示したので，7^3，7^4 というように次数を上げて対応できないかを考えたようである。

① 342＜343＜344 で比較する



課題2 $\log_{10}342<\log_{10}343<\log_{10}344$ とすると

$\log_{10}2+2\log_{10}3+\log_{10}19<3\log_{10}7<3\log_{10}2+\log_{10}43$

$\frac{1}{3}(\log_{10}2+2\log_{10}3+\log_{10}19)<\log_{10}7<\log_{10}2+\frac{1}{3}\log_{10}43$

$\log_{10}2$, $\log_{10}3$, $\log_{10}19$, $\log_{10}43$ の値を代入して計算

$\frac{1}{3}(0.3010+2\times 0.4771+1.2788)<\log_{10}7<0.3010+\frac{1}{3}\times 1.6335$

$0.8447<\log_{10}7<0.8455$

$0.8455-0.8447=0.0008$ → これは課題1より精度が高いといえる。

$343=7^3$ の利用は真数が 19 や 43 の常用対数が必要となる。上記解答の生徒は常用対数表を調べたようである。通常の授業であれば、このような解答の際に、常用対数表を用いて調べることはこの課題においてどのような意味を持つかを伝えられる。今回は後日、様々な解答例を生徒たちに紹介する際に補足をした。

② 2400＜2401 および 49＜49.152 の利用

後に掲載した生徒の感想からもわかるが、一度は①の方法を考えたようである。精度を高めるための工夫をして 49<49.152 に至っている。これもグループワーク等であれば、どのような実験を重ねたのかを共有することもできたかと思う。

課2　課題1よりも精度の高い評価をし、その差を近似値で答える

課題1では7^2を軸に考えたため、7の指数を大きくして考えてみる。
7^3を考える。2と3を使って7^3に最も近づく場合は、3^4、2^2だが、
出てくる値は課題1よりも精度が低かった。

7^4を考える。

$$7^4 = 2401 > 2400 = 2^3 \cdot 3 \cdot 10^2$$

したがって

$$\log_{10} 7^4 > \log_{10}(2^3 \cdot 3 \cdot 10^2)$$

$$4\log_{10} 7 > 3\log_{10} 2 + \log_{10} 3 + 2\log_{10} 10$$

$$\log_{10} 7 > \frac{1}{4}(3 \times 0.3010 + 0.4771 + 2)$$

$$\log_{10} 7 > 0.845025$$

小数第3位まで求めたいため、$\log_{10} 7$よりも大きい値を考える。
真数の2乗である49に最も近くなる2,3,10を使ってつくれる数を求める。

すると、 $$48 \times \frac{2^{10}}{10^3} = 49.152 > 49$$

よって $$\log_{10} 49 < \log_{10}\left(48 \times \frac{2^{10}}{10^3}\right)$$

$$2\log_{10} 7 < 4\log_{10} 2 + \log_{10} 3 + 10\log_{10} 2 - 3\log_{10} 10$$

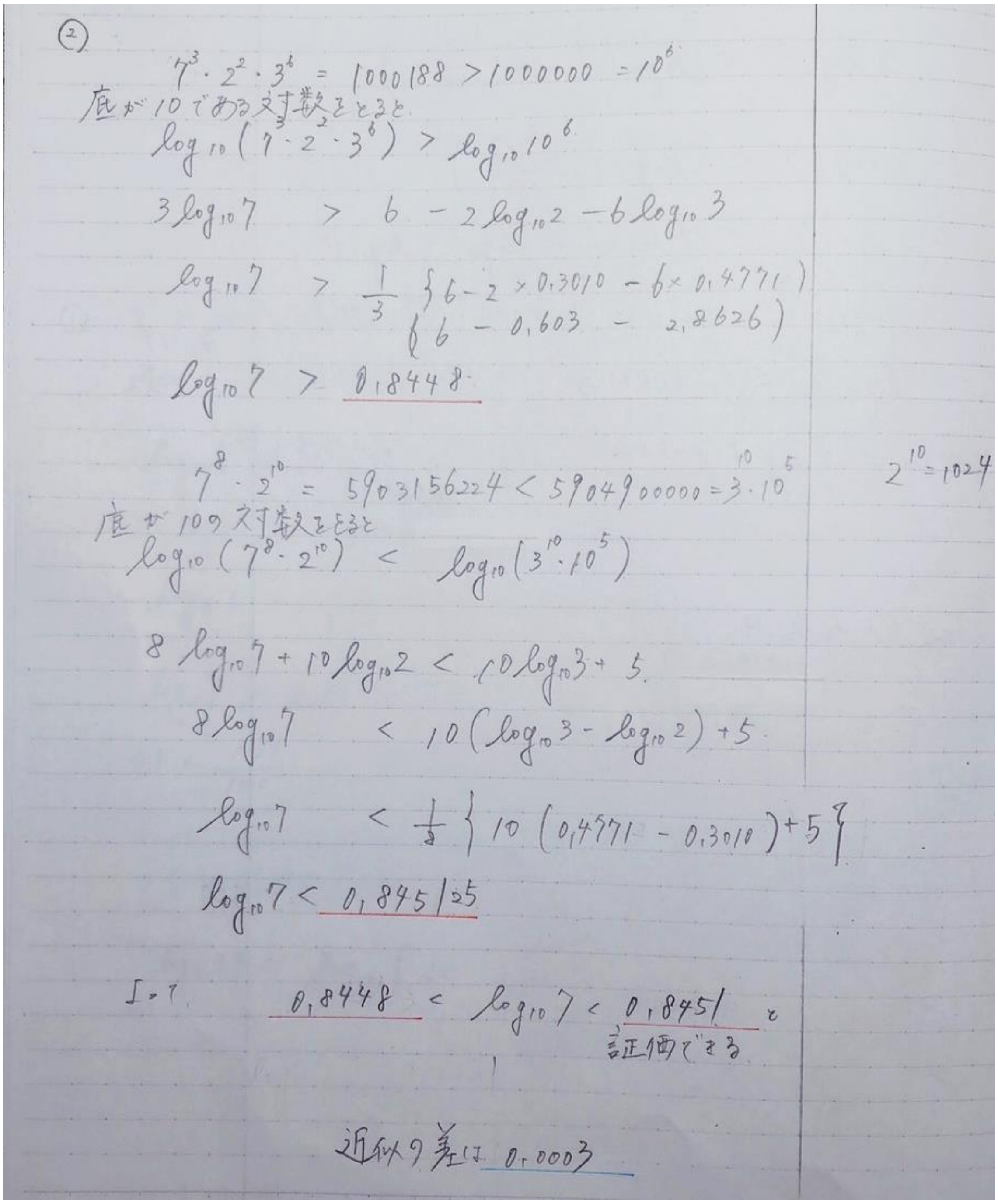
$$\log_{10} 7 < \frac{1}{2}(14 \times 0.3010 + 0.4771 - 3)$$

$$\log_{10} 7 < 0.84555$$

したがって $$0.845025 < \log_{10} 7 < 0.84555$$

差は 0.000525

③　100000＜1000188 および 5903156224＜5904900000 の利用


②

$7^3\cdot 2^2\cdot 3^6 = 1000188 > 1000000 = 10^6$

底が10である対数をとると

$\log_{10}(7^3\cdot 2^2\cdot 3^6) > \log_{10}10^6$

$3\log_{10}7 > 6 - 2\log_{10}2 - 6\log_{10}3$

$\log_{10}7 > \frac{1}{3}\{6 - 2\times 0.3010 - 6\times 0.4771)$

$\{6 - 0.603 - 2.8626)$

$\log_{10}7 > 0.8448$

$7^8\cdot 2^{10} = 5903156224 < 5904900000 = 3^{10}\cdot 10^5$　　$2^{10}=1024$

底が10の対数をとると

$\log_{10}(7^8\cdot 2^{10}) < \log_{10}(3^{10}\cdot 10^5)$

$8\log_{10}7 + 10\log_{10}2 < 10\log_{10}3 + 5$

$8\log_{10}7 < 10(\log_{10}3 - \log_{10}2) + 5$

$\log_{10}7 < \frac{1}{8}\{10(0.4771 - 0.3010) + 5\}$

$\log_{10}7 < 0.845|25$

よって　$0.8448 < \log_{10}7 < 0.8451$ と証価できる

近似の差は 0.0003

　因数に 2，3，7 を含み、10 の累乗で表される数に近い数を探していくと 1000188 にたどり着く。根気よく検証を重ねれば見つかるレベルではあったと思う。今回は log2 や log3 を小数第 4 位の概数で与えていたため、この精度までが適度な到達点かと思われる。もっと高い精度を出させるために、log2 や log3 から作らせていく授業展開もあるかもしれないと感じた。

生徒の感想
・最初 log7^3 で行ったらなかなか良い前後の数字見つからずやっと見つけたと思ったら最後に 3 で割り切れず…といったことをしていたら 1 時間半経っていました。 でも、最後課題 1 の差よりも小さい差になったのでかなりの満足感を得ました。楽しかったです。
・2 と 3 と 5 を使ってできる積などを並べて 7 の倍数と比べてみたりしましたが、なかなか近い数字が見つからず、近似値を見つける難しさがとてもよくわかりました。また、今回の課題で対数の計算をたくさんしたので、良い練習になったと思います。
・課題２では、数の桁数が大きくなり、計算が大変でした。近似値を求めるときにより精度の高い評価をしようとすると計算も複雑になることを実感しました。しかし、複雑な計算を地道にすることでより精度の高い評価ができるため、計算のやりがいがあると思いました。
・数字を組み合わせて近似値を求めるのは面白かったです。もっと細かく求めてみたいと思いました。ただ、数字がどんどん大きくなって計算するのが大変でした。
・log2 と log3 の値のみで log7 を除く log10 までの値が求められることに感激しました。
・課題 2 は 7^4 と 2400 を比較することはすぐに思いつきましたが、そこで出てきた値と小数第 3 位が同じになるような数を見つけるのに時間がかかりました。
・より精度の高い評価をするのが大変だったけど、楽しかったです。 本来なら課題１の値を使わずに課題２に取り組むべきだったのだと思いますが、そうするとどうしても１１や２９などの素数が出てきてしまい、出来なかったので、それが少し悔しかったです。
・課題 2 において、最初に 7 の４乗に対してより近似値の差が小さくなる様な値を見つけるのが難しかった。（底は 10 とします。→）log２と log３からどこまでも求められそうで面白かった。
・より精度の高い近似値を出すのに計算が大変だったが、課題 1 より課題 2 の方で細かい値が出た時はとても快感だった。
・効率のいい解き方がわからなかったので、課題１と同様の解法で解きました。課題１より詳しい値を求めよということだったので、48＜49、49＜50 の範囲で２、３、５、で素因数分解できるものを片っ端から調べていきました。なのでとても時間がかかりました。また、時間がかかったのに、49＜50 の範囲のものを探すことができませんでした。一見簡単そうに見えるけど、難しい課題だなと思いました。
・適当な数が全く思いつかず、母や妹にすきな数は？とか聞いて見てなんとかより詳しく不等式で評価することができました。1024 は、情報処理でよく使う数だそうです。覚えておきたいとおもいます。(笑) とにかく計算が大変でした。提出する紙以外に計算用の紙があり、そこでたくさん数探しをしました。7 の累乗をこんなに計算したのは初めてです。対数ってすごい概念だなと実感しました。(誰がこんなの思いついちゃってんだよ…とも)以外と思ったよりこの課題を楽しめたと思います！
・工夫をすることで、思ったよりはるかに真の値に近い値を定められるということがよく分かった。先生が PDF ファイルで教えてくださったように対数の性質に沿って自由自在に log

をつけたり外したりすることができる(対数の性質により対数の世界から普通の世界の数に戻すことができる）ので計算が大幅に楽になる、ということを実感した。

・私はこの課題に取り組んでみて、数字の仕組みを考えさせられました。課題２ではより精度の高い評価の仕方を見つけるのが大変でした。７を何乗かしてできた数の近似値を素因数分解したり、ルートを使って近似値を考えたり、普段、この数は〇×〇してできる数だ、とか考えないので、数を見る視野が広がったと思います。また、課題２で、課題１より精度の高い評価の方法を求められたとき、とてもすっきりして数学って楽しいと感じました。

・地道に近い値を探すのがとても大変でした。（もっと良い方法があったのかもしれませんが､､）しかし、１つ見つかると、それよりもっと近い値があるのではないかと思い、気づいたら探すのに夢中になっていました。

以上