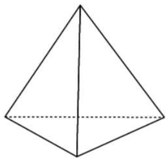
卒業期における空間図形の総合的な考察を促す課題学習

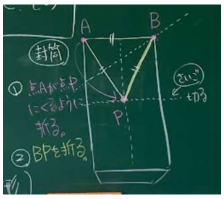
藤原　大樹（お茶の水女子大学附属中学校）

１．本時の目標



本時では，頭の中でイメージしたり見取図でかいたりした正四面体を基に，生徒と教師との対話や生徒同士の対話を通して，次の問題を発見し，問いを少しずつ定性的なものから定量的なものに深化していけるようにする．

> 1 辺 6cm の正四面体のねじれの位置にある 2 辺に平行な平面でその立体を切るとき，
> (1) 切り口の図形は何になるか．
> (2) 切り口の図形の周長はどうなるか．
> (3) 切り口の図形の面積はどうなるか．



封筒で手作りした正四面体の立体模型を操作，観察するなどして，論理的に考察し表現することにより，生徒が自立的・協働的に上記の問題を思い思いに解決できるようにする．本時の目標は，「空間図形に潜む新たな性質や関係を見いだし，それらについて，必要に応じて既知の図形の性質や平面の図，表，式，グラフなどを用いて論理的に考察し表現することができる」とする．

２．本時の位置付け

中 3 の卒業期に 2 時間扱いの課題学習として本時を設ける．平成 29 年告示中学校学習指導要領解説数学編 p.174 に，「生徒の数学的活動への取組を促し思考力，判断力，表現力等の育成を図るため，各領域の内容を総合したり日常の事象や他教科等での学習に関連付けたりするなどして見いだした問題を解決する」課題学習を，「各学年で指導計画に適切に位置付けるものとする」とある．

中学校数学科の内容を学習し終えた卒業期では，単なる反復練習のみならず，生徒の新たなステージに向けて，既習事項，実物，数学的表現，アプリなど生徒が使えるものを総動員して問題発見・解決に自立的・協働的に挑む授業を設け，数学のよさを改めて実感できるようにしたい．空間の豊かな感覚や新たな見方につながる本時の経験は，結果的に入試等でも生かされるはずである．

３．本時の主張

（１）空間観念の育成

空間観念の育成を目指し，授業の冒頭では念頭操作から始め，解決に向けて必要に応じて，具体物や平面の図などの操作，観察により，空間と平面の活発な行き来のある思考を促す．問題（1）で見取図，問題（2）では展開図が活躍する．

また，生徒同士の対話とノートへの記述を重視し，上記の操作，観察を通した生徒同士の疑問，予想，発見，検証の連鎖を引き出したい．

（２）問題発見と総合的な考察

生徒の問題の発見と焦点化・深化に向けて，授業の冒頭で教師はわざと曖昧に問いかけていく．対話により，生徒はまずは切り口の図形を気になり始め，その後そのまわりの長さや面積のことが気になっていく流れをつくる．数量が変わるのか変わらないのか，変わらないならばいくつになるのか，変わるのならばどのような変わり方をするのかなど，既習事項や立体模型，平面の図，アプリなどを使って，領域内・領域横断で総合的に考察する機会を設ける．

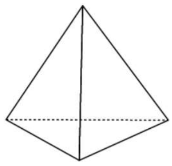
なお，本時では校内にある廃棄の封筒を一人 1 枚ずつ配る．これを折って正四面体の模型を作ったり，切り口をかいたり切ったり，折りたたんだりして操作，観察することで問題（2）の結果の見通しが得られる．

（３）新たな関数との出合い

特に問題（3）では，空間図形の性質について思考を深める中で，図形の中に潜む新たな関数（二次関数）と出合うことになる．二次方程式の導入の問題で似た関数を扱った場合には，その授業のノートを開いて関連付けるのもよい．表の y の値の第 1 階差やグラフの概形などから，二乗に比例する関数との共通点を見いだす生徒も予想される．未知なる関数の特徴を捉えるときの表，式，グラフのよさを，再実感する機会となろう．

４．本時の展開（２時間扱い）

<table>
<tr><th>主な学習活動と予想される生徒の反応</th><th>指導上の留意点</th></tr>
<tr><td>１．念頭操作から，問題を発見する.
T「頭の中に正四面体を思い浮かべてください.」
T「その辺の中でねじれの位置にある 2 辺を頭の中で選んでみて．その 2 辺に平行な平面で正四面体を切って.」
S「切れた」「よくわからない」S「長方形」「正方形だよ.」
T「みなさん，気になることはありますか.」 S「切り口！」
T「切り口の…？」 S「図形」「面積」「まわりの長さ！」
T「いろんな問題が見つけられましたね．整理しましょう.」

問題　1 辺 6cm の正四面体のねじれの位置にある 2 辺に平行な平面でその立体を切るとき，
（1）切り口の図形は何になるか.
（2）切り口の図形の周長はどうなるか.
（3）切り口の図形の面積はどうなるか.
</td><td>・はじめは念頭操作を全員に求め，イメージできない生徒には模型や見取図を見せてから，念頭で再び，あるいは見取図を見せて操作させる.
・問題（1）は「切る場所によって切り口の図形が変わるかどうか」，問題（2）は「周長は変わるかどうか」「変わるならどのように変わるか」「変わらなければ何 cm になるか」，問題（3）は「面積は変わるか」「変わるならどのように変わるか」「変わらなければ何 cm^2 になるか」などと，それぞれ焦点化できる.</td></tr>
<tr><td>２．自立的，協働的に解決し，成果を共有する.
T :「封筒模型，教科書，見取り図，PC，何でも使ってよいです．一人で考えても仲間と考えても構いません.」
S : 問題（1）で，切り口は基本的に長方形になり，2 辺からの距離が等しい平面で切るときは正方形になると気付く.
S : 問題（2）で，6cm（封筒の横の長さ）になると気付く.
S : 問題（3）で，表やグラフをかくと，2 乗に比例する関数に似た関数が現れることに気付く．GeoGebra で確かめる.</td><td>・封筒を一人 1 枚配る．問題（2）では，折って正四面体の模型を作ったり，切り口を実際に切ってみたり，平らに折りたたんだりすることで，結果の見通しが得られる.
・問題（3）の解決には，手書きしたグラフが正しいかどうかを，GeoGebra を使って確かめるのもよい.</td></tr>
<tr><td>３．過程と結果を振り返って新たな問題を見いだす.
T :「問題を考える上で役に立った数学的な表現は何かな.」
S :「見取図」「展開図」「封筒の模型」「表とグラフですね.」
S :「まわりの長さは不変．面積はある時点で最大になる．これらのわかったことは，他の正多面体でも同じなのかな.」
S :「立方体とか正八面体とかは，どうなのだろう.」
S :「まわりの長さは展開図で考えればわかりそうだね.」
T :「前にポリドロンがあるので興味のある人は見てごらん.」</td><td>・解決におけるどんなときにどんな数学的表現が役立ったかを自覚化させる.（解決の過程の振り返り）
・同じことが別の正多面体でもいえるかどうかを問いかける.（解決の結果の振り返り）
・第 2 時の最終板書は以下の通り.</td></tr>
</table>