研究論文

活用する力を身につける数学科授業の開発
－１次関数における知識の活用場面に着目して－

Development of Teaching Practices for Fostering Skills to Make Use of Knowledge in Mathematics

数学科　大　塚　みずほ

要　旨

数学を学習しているすべての場面において、生徒１人１人が、何らかの形で既習の知識を活用しながら、新しい知識へと発展させている。この知識の活用を授業の中に意識的に繰り返し取り入れることによって、知識の定着がより深まるだけでなく、知識の活用方法がわかり、授業外の日常の場面においても数学の授業で身につけた知識を活用することができるようになることを目指した。

本研究では、中学校第２学年の「１次関数」の単元において、既習の比例の知識を活用して、１次関数の知識へと発展させ、さらにその知識を他の問題場面に活用していく授業を２つ考案した。一つは単元の導入で「水そうの問題」を取り上げた。この教材は、様々な教科書で取り上げられており、生徒にとって取り組みやすい教材である。もう一つは、直線の式の求め方の導入時に時間と距離に関するグラフを教材として取り上げた。先の「水そうの問題」と違って難易度が高く、一般的には１次関数の活用場面で取り上げられることが多い。しかし、グラフを読み取る活動の中から既習の知識を活用する視点を引き出すことによって、既習の知識を活用するということそのものについて学んだ。

これら考案した授業を実践し、その効果を確かめるために2005年に行われた「特定の課題に関する調査（算数・数学)」の問題をもとにした調査問題を実施した。その結果を2005年の調査結果と比較し、授業の効果を検証した。その結果、正しいグラフを選択する問題について、日常事象における数量関係やそれらの変化の様子を与えられた情報から読み取り、それを適切に判断する力が身についてきたことがわかった。また、日常事象を数学的な視点から捉え、それを言葉で表現・記述する力もついてきたことがわかった。

本実践では単元指導計画の中でも特に２つの場面の授業に焦点を当てて実践を行ったが、本来は１次関数の単元全体をより系統的にみた計画、授業実践を行っていく必要がある。また、中学校３年間を通した単元指導計画や教材開発を行っていくことも今後の課題としてあげられる。

キーワード：１次関数　比例　グラフ　活用　単元の導入

Ⅰ　はじめに

平成20年の「中学校学習指導要領解説数学編」では「習得」「活用」そして「探求」の重要性が述べられている。これらは順に進むものではなく、相互に関連しあって展開していくと考えられ、「活用」することでその「習得」がより一層深まったり、「探求」の過程で知識および技能の「習得」やそれを「活用」することについて見直したりすると述べられている。

例えば「活用」と一言で言った場合、何かを活用するための授業場面を積極的に取り入れていかなければいけないと難しく考えてしまう傾向がある。しかし実際は、数学を学習しているすべての場面

において、生徒１人１人が、何らかの形で既習の知識を活用しながら、新しい知識を学習しているはずである。つまり、数学の授業のすべての場面において「習得」だけでなく、「活用」する機会は存在している。大切なことは、日々の授業の中で既習の知識の活用場面を教師がいかに生徒に意識化させるか、また、活用した知識をいかに発展させて新しい知識へと高めていくかではないだろうか。

本研究では、１次関数の実践を取り上げる。１次関数の学習は１年生の時に学習した比例の学習の発展であり、比例の学習で身につけた知識を活用しながら新たな知識を習得していく場面が多くある。一方で、変化の割合などの新しい概念を学習し、現実場面から一歩進んだ、より抽象的な視点で関数を取り扱っていくこととなる。

１次関数の活用場面における困難点の一つとして、日常の問題場面と抽象的な概念をつなげて考えることができないということが挙げられる。例えば問題場面での「速さ」と、１次関数の「変化の割合」や「グラフの傾き」などの知識を組み合わせて考えることができず、その結果、１次関数を問題場面に活用できないという状況がみられる。

本研究は、既習の比例の知識を活用して、１次関数の知識へと発展させ、さらにその知識を他の問題場面に活用していく授業を考案し、実証しようというものである。

Ⅱ　目的・方法

１．研究目的

１次関数の単元において、既習の比例の知識を活用して、１次関数の知識へと発展させ、さらにその知識を他の問題場面に活用していく授業を考案・実践する。また、授業の最後に調査問題を実施し解答を分析することを通して、授業の効果を考察する。

２．研究方法

（１）研究の概要

①１次関数の単元の中で特に「導入」に焦点を当て、そこで取り上げた教材を中心に、単元指導計画、授業案を作成する。

②計画をもとに授業実践を行う。

③2005年に行われた「特定の課題に関する調査（算数・数学）」の問題をもとにした調査問題を実施する。

④調査問題の解答を「特定の課題に関する調査（算数・数学）」の結果と比較しながら分析し、単元全体の構成や特に焦点を当てた授業についての効果を検証・考察する。

（２）対象

お茶の水女子大学附属中学校　2013年度　第２学年４クラス130名

（３）期間

2013年10月～11月（考案授業① 10月15、17日、考案授業② 11月2、7、8日）

（４）分析内容

①授業中の反応観察や公開研究会の録画映像検証、活動の成果物検証

②授業ノート、プリントの生徒の記述の分析

③授業後に実施した調査問題の解答の正答率・記述内容

Ⅲ　単元と授業の構想

1．単元計画

全16時間で1次関数の単元指導計画を立てた。

1　1次関数	1　1次関数	［2］	考案授業①
	2　変化の割合	［1］	
	3　1次関数のグラフ	［3］	
	4　直線の式の求め方	［3］	考案授業②
2　方程式と1次関数	1　2元1次方程式のグラフ	［2］	
	2　連立方程式の解とグラフ	［1］	
	3　1次関数の活用	［3］	
章のまとめと問題		［1］	全16時間

このうち、今回の研究では①1次関数の導入と②直線の式の求め方の導入に焦点を当てて授業実践を行った。

2．授業のねらい

（1）1次関数の導入

様々な教科書などで単元の導入で扱われる「水そうの問題」を取り上げた。1分間に水そうに入れる水の量や、もともと水そうに入っている水の量の設定を変えた状況において、まずは表にまとめ、そこから式やグラフにもまとめていく。1次関数でも比例の知識があれば、それを活用しながら表から式、グラフにまとめることは可能である。その際、比例の知識をどのように活用したか意識させるとともに、設定を変えることによって、式やグラフにどのような違いが生まれたのか、それはなぜなのかを考察させた。

これらの活動を1次関数のはじめに取り入れることにより、1次関数で学ぶべき概念の基礎の多くをここで一通り取り上げることができる。そして、その後の学習においてもくり返し「水そうの問題」に戻ることで、実際の問題場面と抽象的な概念をつなげて考える基礎を作り上げていくことをめざした。

（2）直線の式の求め方の導入

時間と距離の関係を表すグラフを見て、必要な情報を読み取り、事象を数学的に解釈すること、読み取った内容を直線の式の求め方につなげていくことを目的として、直線の式の求め方の導入時に時間と距離に関するグラフを教材として取り上げた。この教材は1次関数の活用場面で取り上げられることが多いが、あえて1次関数の表、式、グラフの関係を学んだばかりの時期に取り上げることで、授業への興味を喚起し、学んだ知識を用いてグラフを読み取ろうという気持ちを高めていけると考えた。また、直線のグラフから1次関数の式を求めることについても、グラフの情報を読み取る活動の中からその視点を引きだし、「水そうの問題」などの今までの知識を活用しながら新しい知識を見いだしていくことを目指した。導入の問題にその都度戻りながら知識を身につけていくことで、活用の基礎力を身につけていくことを目的とした。

Ⅳ　授業の実践報告

1．水そうの問題【1次関数の導入】

（1）問題場面と表・式との比較

まずは「空の水そうに1分間に3cmずつ水位が上昇するように水を入れるときの時間 x 分と水位 y cm」という場面から1年生の時に学習した比例の知識を確認した。そして、次の問題場面を提示した。

> 深さ28cmの水そうに、一定の量ずつ水を入れていきます。
>
> $\boxed{1}$　水を入れ始める前、10cmの高さまで水が入っていました。この水そうに毎分3cmずつ水位が増すように水を入れていきます。
>
> ①　水を入れ始めてから x 分後の増加した水位を y cmとする。
>
> ②　水を入れ始めてから x 分後の底面からの水位を y cmとする。

そして、①、②について表にまとめ、式を立てることを促した。このとき、①（比例）と②の場面を比較し、表や式の上で共通していることや異なっているところをあげさせた。その際、

> ・表で x が1増えたときに y が3増えるのが同じ。
>
> ・式で x の係数が同じ。
>
> ・①の表に＋10したものが②の表になっている。
>
> ・②の式は比例の式に＋10されている。

などに意見が出た。そこで、これらの点の原因を問題場面に戻って確認した。

さらに、$\boxed{1}$の条件を変えた問題場面$\boxed{2}$、$\boxed{3}$を提示した。

> $\boxed{2}$　水を入れ始める前、10cmの高さまで水が入っていました。この水そうに毎分1.5cmずつ水位が増すように水を入れていきます。
>
> $\boxed{3}$　水を入れ始める前、5cmの高さまで水が入っていました。この水そうに毎分3cmずつ水位が増すように水を入れていきます。
>
> このとき、水を入れ始めてから x 分後の底面からの水位を y cmとする。

$\boxed{2}$、$\boxed{3}$についても、先ほどと同じように表にまとめ、式を立てる作業を行った。その後、$\boxed{1}$、$\boxed{2}$、$\boxed{3}$それぞれの場面における、表や式を比較し、問題場面との関連を確認した。生徒からは

> ・$\boxed{1}$、$\boxed{2}$、$\boxed{3}$のどの式も比例の式に何か数を足した形になっている。
>
> ・水を入れはじめる前の水そうの水位が変わると、比例の式にたされている部分が変わる。
>
> ・1分間に増加する水位が変わると、xの係数が変わる。

という意見が出た。このことから、1分間の水位の増加量がxの係数に、水を入れはじめる前の水そうの水位が比例の式にたされている定数の部分に関係していることを確認した。

（2）グラフの作成と表・式・グラフの比較

次に、$\boxed{1}$①②、$\boxed{2}$、$\boxed{3}$について、表や式をもとにしながら、グラフをかく作業を行った。1次関数

のグラフを学習する前であっても、比例のグラフの知識を活用することで、グラフが直線になりそうであることがわかり、グラフをかくことができていた。

また、表や式にまとめたときと同じように、かいたグラフについての比較を行った。この際にグラフに関して、次のキーワードが出された。

- 直線
- 平行
- グラフの傾き方（または傾き）
- 増え方
- スタート地点

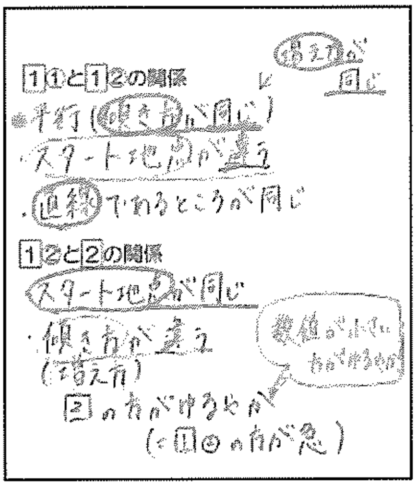


図１　生徒の比較の例

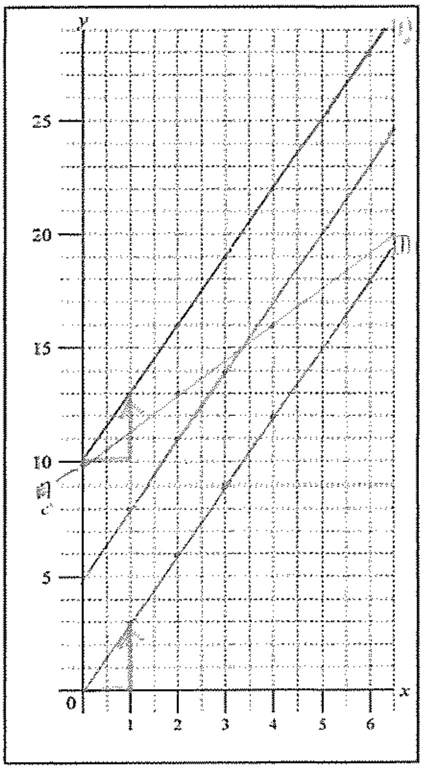


図２　生徒のかいたグラフ

これらの比較から、グラフの傾き方・増え方が１分間の水位の増加量と、グラフのスタート地点が水を入れはじめる前の水そうの水位と関係していることを確認した。また、それらと式との関係もあらためて確認し、次の図にまとめた。

表	式	グラフ	問題場面
x: 0, 1 / y: 10, 13 ⟷	xの係数 ⟷	グラフの傾き方 ⟷	１分間の水位の増加量
$x=0$のときのyの値 ⟷	定数の部分 ⟷	スタート地点 ⟷	水を入れはじめる前の水そうの水位

$$
\left.\begin{array}{l}
y = 3x \\
y = 3x + 10 \\
y = 1.5x + 10 \\
y = 3x + 5
\end{array}\right\}
\quad \overbrace{y = ax + b}^{x\text{の１次式}} \Rightarrow y\text{は}x\text{の１次関数である}
$$

a：xの係数　b：定数の部分

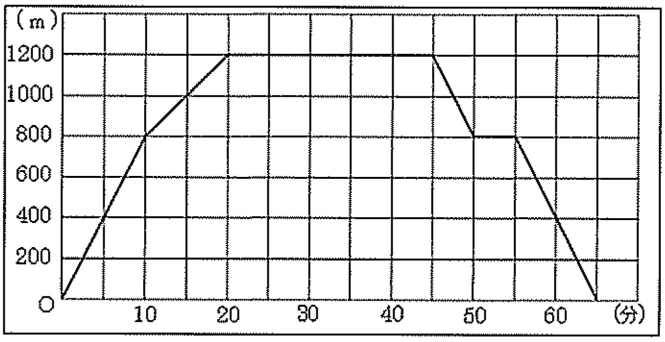
（３）導入後の展開

水そうの問題で確認されたことをもとに、１次関数の基本的な用語などの概念を確認していった。特にグラフについては、「水そうの問題」でのグラフの傾き方・増え方、グラフのスタート地点などの言葉とグラフの「傾き」や「切片」といった概念を丁寧につなげていくことを意識した。くり返し、実際の問題場面とグラフの「傾き」や「切片」などの概念とをつなげて考えることを促すことで、他の問題場面にもその考え方を生かせるような基礎作りを行っていった。

2．美保さんの移動の問題【直線の式の求め方の導入】

直線の式の求め方の導入として、以下の具体的な問題場面を設定し、グラフから様々な情報を読み取る授業を行った。

> 美保さんは、家から1200m離れた書店に本を買いに行きました。帰りは、途中の公園で友達と会い、買ってきた本についてしばらく話をしてから家に帰りました。
> 図は、美保さんが家を出てからの時間と、家からの距離の関係を表したグラフです。



（1）グラフの読み取り

まず、問題場面を全体で共有し、家と書店を往復していることを黒板で図に表して確認した。図に表すときは、文章に書かれていることのみをシンプルに表すように工夫をした。

次に、3、4人の学習班に分かれてグラフから読み取れることをたくさん書き出すように指示をし、その後、全体で発表を行った。その際、班で1つずつ発表してもらったが、必ず前の班とは違う内容を言うように指示して、より多くの意見が出るようにした。これらの発表から、グラフから読み取れる内容として出てきたものには次のようなものがあった。

- 家から書店に行く途中、歩く速さが遅くなった。
- 行きは始め80m/minで途中から40m/minになった、帰りはずっと80m/minであった。
- 書店には25分間、帰り道の公園には5分間いた。
- 家から公園までは800mである。

また、それぞれグラフのどの部分から読み取れるのか、具体的に根拠を明らかにして説明させ、読み取った内容のみの場合にはこちらからその根拠を問う発問を行った。下はその一部である。

S：書店に行く途中で減速しています。　（S：生徒　T：授業者）
T：それはどの地点ですか。
S：800m地点です。
T：それはグラフのどんなところからわかりますか。
S：グラフのはじめの方の800mのところでグラフの傾きがゆるくなったからです。

生徒のプリントの記述や発表では具体的な根拠が述べられることは多くなかったが、やりとりの中で、グラフの傾きと美保さんの速さが関係していること、傾きが変化しているところは美保さんの速さが変化した地点であること、行きと帰りではグラフの傾きの正負が違うこと、グラフが平らな（傾きがない）ところは書店や公園でとどまっている（移動していない）時間であることなどを確認した。

（2）グラフを式に表すための方針

次に「グラフを式に表す」という目標を提示し、そのための方針について考えた。生徒からはまず、美保さんが家を出てからの時間をx分、家からの距離をy mとすることがあげられた。その上で、1次関数導入時の「水そうの問題」と比較しながら次のような意見が出された。

・水そうの問題の時の毎分何cmずつ入れていたかということと、速さの毎分何mずつ進むかということが似ている。
・速さが変わってグラフの傾きが変わるとグラフを式に表したときのxの係数が変わるはず。
・グラフの傾きが変わるところでは違う式で表さないといけない。

これらの意見をもとに、まずグラフをいくつかの部分に分け、その分けた部分ごとに式を考えることにした。グラフの分け方については、主に3つの部分に分ければいいという意見と、6つの部分に分ければいいという意見に分かれた。前者の3つの部分とは①速さが80m/minの部分、②速さが40m/minの部分、③速さが0m/minの部分のことであったが、話し合いの中で「右上がりの部分と右下がりの部分では違う」「グラフを伸ばすと重ならないから違う式になるはずだ」という意見が出され、6つの部分に分けて考えることになった。

（3）グラフを式で表す

ここでは4つの部分について取り上げる。

【$0 \leqq x < 10$】

すぐに$y=80x$という式が出された。なぜその式が出てきたのかという問いに対しては、「(0，0) を通っているから」「比例だから」「速さが80m/minだから」という理由が挙がった。そこで、グラフの傾きと美保さんの速さ、またそれらとxの係数の関係について確認をした。

【$10 \leqq x < 20$】

はじめ、$y=40x$という式が出されたが、すぐに「$x=10$のとき$y=800$にならないのはおかしい」という意見が出た。「比例ではなく、1次関数の$y=ax+b$の形になるのではないか」という意見をもとに、$800=40\times10+b$から$b=400$を出し、$y=40x+400$を導いた。「グラフを延長してみると切片が400になる」という意見もあり、それも授業で取り上げた。

【$20 \leqq x < 45$】

「傾きがないところは移動していないから速さが0 m/minである」という意見をもとに、$y=0\times x+b$から$y=b$という式が出された。その上で常に1200m地点にいるということから$y=1200$が導かれた。

【$45 \leqq x < 50$】

グラフが右下がりであることから、「xの係数が負の数になる」という意見が出された。また、速さが80m/minであるので、$y=-80x+b$という形が導かれた。グラフの延長した先の切片がわからず困っている生徒もいたが、【$10 \leqq x < 20$】の考え方から、$1200=-80\times45+b$または$800=-80\times50+b$から$b=4800$を出し、$y=-80x+4800$を導くことができた。

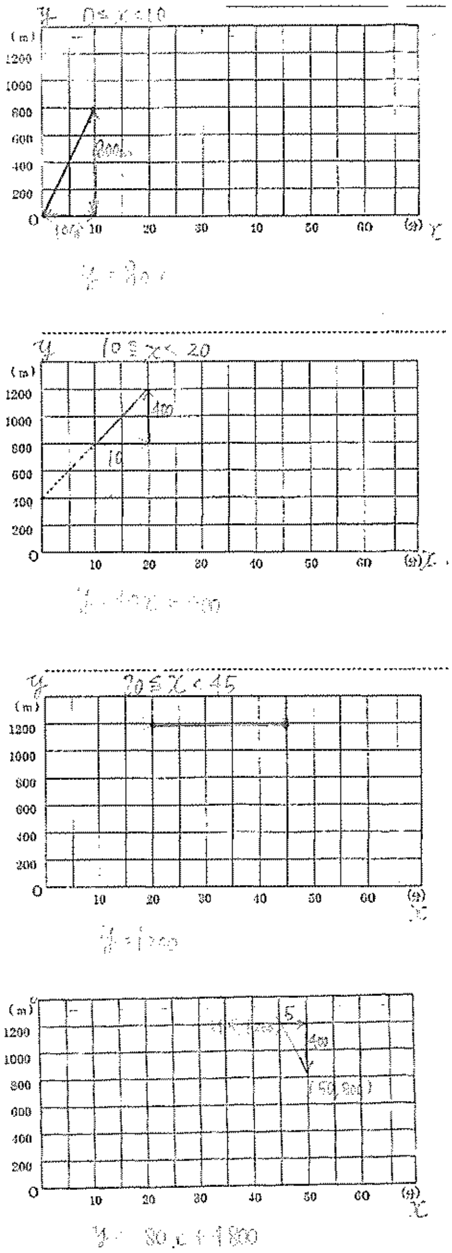


図3　生徒のかいたグラフ

（4）直線の式の求め方のまとめ

一通りグラフを式に表したのち、どのように式を導いたかについてふり返りを行った。

・グラフから傾きを読み取る。それを x の係数とする。
・切片がわかればそれを $y=ax+b$ の b とする。わからなければ、どこか1点の座標を代入する。

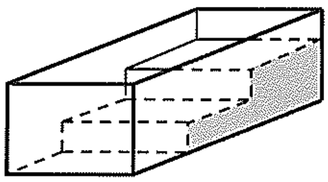
これらについては、一般的な直線の式の求め方として利用できる考えであることを確認した。また、2点の座標がわかっているときには、そのそれぞれを $y=ax+b$ に代入し、連立方程式を解いて a、b の値を求める方法があることも伝えた。

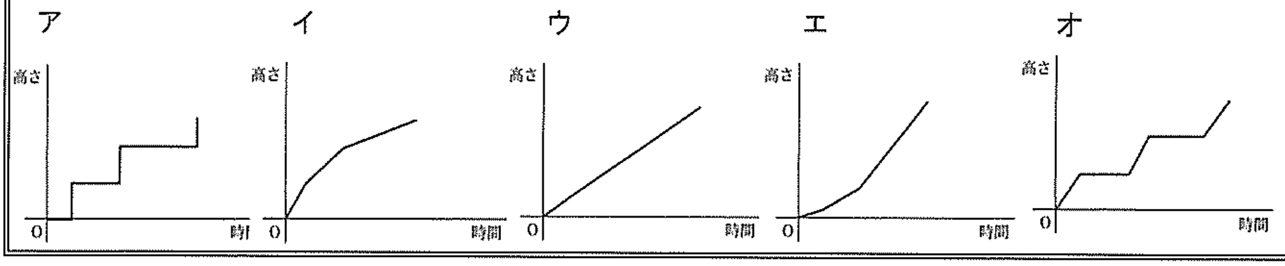
V　考察と課題

1．考察

2005年に行われた「特定の課題に関する調査（算数・数学）」の問題をもとした水そうの問題を授業の最後に調査問題として出題した。

底が階段のようになっている直方体の水そうがある。階段の各段は水平です。この水そうに毎分同じ量ずつ水を入れていきます。水を入れてから満水になるまでの時間と水面の高さとの関係を表すグラフに最も近いのはどれですか。ア～オの中からあてはまるものを1つ選び、その理由を答えなさい。





生徒130名のうち、69%が正解であるイを選択することができ、そのほとんどが、何かしらの選択理由を記述することができていた。このうち、①直方体の体積（または底面積）、②水面の高さの上昇スピード、③グラフの傾き、の3点すべてにふれて記述ができたのはイを選択したもののうちの11%（全体の8%）であった。

・はじめ入る部分は底面積が小さいので水位の上がる速度が速くだんだん傾きが緩やかになっていくから。
・最初は底面積が小さいので水面の上昇もはやく、グラフの傾きが急になる。だが、水面の高さが上がり、底面積が広くなってくると、水面の上昇のスピードはおそくなり、グラフの傾きも緩やかになっていくと考えられるから。
・段が上がるごとに水を入れる体積が増える。水を入れる体積が増えれば、入れるのにかかる時間も増え、グラフの傾きがゆるやかになっていくから。

イを選択したもののうちの61％（全体の42％）は理由を記述する際、①直方体の体積（または底面積）と②水面の高さの上昇スピードのみにふれ、③グラフの傾きについてふれていなかった。

・水が入る部分の体積が少なければ少ないほど、水面の高さははやく上がっていくから。 ・段を上がっていくごとに、底面積が大きくなるので、同じ量で水を入れ続けると水の高さの変化はゆるやかになっていくはずだから。 ・時間がたつほど底面積が大きくなり、高さが高くなる速度も遅くなるため。

一部に聞き取りをしたところ、「傾きがゆるやかになっているグラフを選択したのだから、そのことについてはふれなくてもよいと思った」ということであった。

また、イを選択したもののうち2%は、理由の記述の際に③グラフの傾きについてはふれているものの、①直方体の体積（または底面積）か②水面の高さの上昇スピードのいずれかにふれていなかった。

・高さが上がるにつれて底面積が大きくなる。そのため、だんだんグラフの傾きはゆるやかになるはずだから。

2005年の「特定の課題に関する調査」では、5つの中から正しいグラフを選択する問題では正答率が1年生22.7%、2年生32.7%、3年生47.5%であった。「特定の課題に関する調査」結果と、今回の授業後の問題の正答率を比較すると、2年生の正答率の2倍以上、3年生の正答率の1.5倍近く高かった。このことから、日常事象における数量関係やそれらの変化の様子を与えられた情報から読み取り、それを適切に判断する力が身についてきたことがわかる。

記述に関しては、「特定の課題に関する調査」では、イかエを選んで選んだ理由を記述する問題で、正答率は1年生22.0%、2年生27.9%、3年生39.3%であった。この正答率は、①直方体の体積（または底面積）、②水面の高さの上昇スピード、③グラフの傾き、の3点のうち、③グラフの傾きについての記述がないものも正答率に含まれている。一方、授業後の問題では全体の50%がほぼ正答となる記述ができており、日常事象を数学的な視点から捉え、それを言葉で表現・記述する力もついてきたことがうかがえる。

後日、イを選択できなかった生徒数名を対象に聞き取りを行った。以下はそのときのやりとりの一部である。

（S：生徒　T：授業者） T：底が階段になっていることによって、段になっているところで何が変化していきますか？ S：水が入る部分の大きさが変わる。 T：水が入る部分の大きさが変わると、水を入れているときにどんな変化が起こるの？ S：入れなきゃいけない水の量が多くなる。 T：多くなると水面の高さの変化はどうなるの？ S：水面の高さの変化はゆっくりになる･･･あ、だったらグラフはイだ。 T：それはどうして？ S：水面の高さの変化はゆっくりになるということは、グラフの傾きもゆるやかになるから。

底が階段状になっていることと水面の高さの変化の関係を捉えることに困難を感じている様子であったが、水面の高さの変化を捉えることができた後は、自分自身でグラフの傾きとの関係を見つけて、

正しいイを選択することができていた。また、多くの生徒が水そうの問題や美保さんの移動の問題を例に挙げて、変化とグラフの傾きの関係を説明していた。これらのことから、直方体の体積や水面の高さの上昇スピードといった日常事象が、グラフの傾きと関係し、どのようにグラフの傾きとして表現されるか適切に判断する力は、今回の授業実践の中で培われてきたものであると考えられる。

2．まとめと課題

今回は１次関数の単元の中でも、単元の導入と直線の式の求め方の導入に焦点を当てて授業実践を行った。１つの教材を導入時にじっくり行い、その知識を繰り返し単元の中で活用していくことによって、１次関数に必要な知識を単元全体を通して身につけていくことができた。また、知識を身につけることと、身につけた知識を活用することは常にセットで行われてこそ、生きた力となる。知識を身につけることも、活用力を育てることも、単元のどこかで取り立てて取り上げてもなかなか日常事象に生かせる力にはならない。だからこそ、単元全体を通して得た知識をどのようなものに活用していくのか、予め考えて単元計画を立てることが重要になる。

今回の実践では、まだ、単元全体をトータルで組み立てていくまでには至らなかった。特に、生徒自らが問題解決の場面において、事象を数学的に解釈し、解決の方法を数学的に説明するような授業実践を行うことがほとんどできなかった。自らが習得した知識を活用し、事象を数学的に解決するような探求場面を設定することによって、より生徒自身が単元における学習内容の意義を実感し、さらに活用・探求していこうとする意欲につながるものと考えられる。そういう視点からも、教材配置や時間数なども含めて単元全体を再構成する必要がある。

また、この２年生の１次関数だけでなく、１年生の比例と反比例、３年生の関数 $y=ax^2$ なども含めた、中学校３年間を通して考えた関数領域の単元指導計画の検討が必要である。数学の他の単元も系統的に学習が進んでいくが、特にこの関数領域については、この２年生の１次関数を中心として前後の学年との系統性が強い。１年生の比例の学習を元に２年生の１次関数の導入が行われるし、２年生の１次関数で学習した変化の割合などの抽象的な概念が、３年生の関数 $y=ax^2$ で活用される。今後、繰り返し学習に取り入れられ、その都度振り返ることのできるような学習課題や学習教材を盛り込みながら、３学年の関数領域を１つの大きなまとまりと考えた系統的な単元指導計画を作り上げていく必要がある。

参考文献

・国立教育政策研究所：特定の課題に関する調査（算数・数学）調査結果，2006

・国立教育政策研究所：平成25年度全国学力・学習状況調査報告書（中学校数学），2013

・文部科学省：中学校学習指導要領解説数学編，2008