

平面と空間を相互に関連付けて考察し表現する学習指導*

－クリスマスツリーの模型制作を通して－

藤原 大樹**

要約

中学校第1学年の「空間図形」単元では、平面と空間を関連付けて考察し表現する力の育成が求められているが、その学習指導に課題がある。本稿の目的を「目的に沿って平面と空間を相互に関連付ける空間図形の学習指導を計画、実施し、生徒の活動の様相を明らかにし、学習指導計画を提案すること」とする。教材「クリスマスツリーを作ろう！」を扱った授業を実施し、分析した結果、次の3点が明らかとなった。①本教材は目的に沿って平面と空間を相互に関連付ける学習を促す価値がある。②実長が知りたい場面で見取図と立面図を合わせたような図をかく生徒が多い。③円錐の立面図をかいたときの頂角の大きさを決めてから展開図をつくらうとするなど多様な問いが引き出される。①～③から投影図の必要性の理解に配慮した学習指導計画を作成し、単元の後半に位置付けることを提案した。その検証などが今後の課題である。

キーワード：平面と空間の関連付け、模型制作、投影、展開

1. 研究の背景

空間図形の学習では、空間観念の育成が重要である。杉山（1995）は空間観念の育成における切断、投影、展開といった操作の重要性を述べている。島田（1990）の「空間の想像力」などに基づいた本田・西村（2007）による「空間思考力」では「2次元の図から3次元の事象を構成し直す」ことが重視されているように、空間図形の学習において平面と空間を行き来する力の育成が重要である。平成29年告示中学校学習指導要領でも、第1学年「B図形」領域に「(2)イ(ア)空間図形を直線や平面図形の運動によって構成されるものと捉えたり、空間図形を平面上に表現して平面上の表現から空間図形の性質を見いだしたりすること」が思考力、判断力、表現力等として位置付けられ、平面と空間を関連付けて考察し表現する力の育成が求められている（文部科学省、2018a）。

では、指導についてはどうか。國宗（2007）の

図形指導の改善点に関する「17の提言」には、空間図形の学習では「図形の計量を通して、図形に関する理解を深め、興味・関心を高める」、「見取図を描いたり読んだりする活動を重視する」、「空間図形の学習指導に、投影する、切断する、展開するという操作を積極的に位置付ける」がある。この提言を受けて、近藤ら（2011）は、立方体を切断してできる立体の模型制作の授業を通して、生徒から「①見取図、展開図、立体との行き来、投影や切断などの操作を活発に行う」「②直観的な判断を振り返り、論理的に考えて確かめる」「③空間図形を1つの平面に着目して考え、平面図形の既習内容を活用する」「④意欲的に問題解決に取り組み、空間図形への興味関心を高める」という4つの活動を見いだしている。上記②～④は上記①に伴ってなされるものと考えられる。

平面と空間の相互の関連付けが、生徒にとって何らかの目的を果たすために引き出されるような学習活動ができないものだろうか。

*令和2年11月28日受付、令和3年2月7日決定
**お茶の水女子大学附属中学校

藤原(2018)では、空間図形の知識・技能を個別的に学ぶことで生徒は学ぶ必要性を感じにくく、理解を深めにくいことを課題視し、授業「三角帽子」を報告している。この授業は、単元末に具体的な問題の解決に空間図形の見方や平面上の表現、計量を総合的に活用するものである。与えられた条件の帽子Aと帽子Bのどちらを作るべきかを架空の主人公に助言することが要求される問題であるが、疑似現実的な場面設定ゆえ、生徒の目的意識に課題がありそうである。そこで、近藤ら(2011)のように生徒が作ってみたいと感じる模型の制作を生徒の活動のゴールとして位置付けてみてはどうか。それにより、活動の目的意識が高まり、知識・技能を総合的に活用して考察し表現する機会が生まれ、空間と平面の関連付けが相互になされるであろう。

2. 研究の目的・方法

本稿では、「目的に沿って平面と空間を相互に関連付ける空間図形の学習指導を計画、実施し、生徒の活動の様相を明らかにし、学習指導計画を提案すること」を目的とする。そのために、次の方法で研究を進める。

- ・目的に沿って平面と空間を相互に関連付ける授業を、模型制作を視点として計画、実施し、映像や画像で記録して分析する。
- ・生徒が作成した設計図、制作した完成模型、ワークシートの記述を比較・照合して、生徒の思いや思考の過程等を捉える。

なお、生徒の活動の様相を探る目的から、全体への指示・指導や困難性の強い生徒への指導以外は、授業者からの関与を極力控えるよう配慮する。

3. 扱う教材について

本稿では教材「クリスマスツリーを作ろう」を扱う。生徒には、図1の課題を提示する。

本教材は、円錐や円柱などを組み合わせて構想を立てて設計し、色画用紙で展開図を作り、これらを組み合わせてクリスマスツリーを制作するものである。実施校では第1学年数学科の週4時間の授業のうち、週1時間を図形領域の学習に充てていて、「空間図形」単元の指導時期が10月中旬～

3月となるので、本教材に取り組む季節として相応しい12月初旬に取り上げることができる。

課題 右の絵のようなクリスマスツリーの模型

を、学習班で協力して色画用紙で作ります。次の【条件】などを基に、イメージ図や設計図を班で書き、色画用紙を使って作り始めましょう。

【条件】

- ・枝葉は円錐で2段を基本とします。幹は円柱とします。鉢は自由です。
- ・幅・奥行きは15cm以下、高さは20cm以下を基本とします。
- ・星などの飾り付けする場合には、昼休み等を活用しましょう。



図1 授業で扱う課題

条件を与えずにツリーを作る課題を提示すると、生徒は無計画でも模型を完成することができるが、数学科としての学習効果はそれほど見込めない。そこで、幅、奥行き、高さの制限の目安を条件として提示し、その条件下で構想を立て、平面と空間を相互に関連付けて考察し表現する生徒の活動が引き出されるよう配慮した。また、対象生徒の状況を踏まえて、生徒の問いをある程度焦点化させるため、枝葉を円錐で2段、幹は円柱を基本とする条件を付けた。一方、多様性と主体性を引き出すため、鉢の形の条件は与えなかった。

作りたい模型のイメージを視覚化するためには見取図が、そして実際に模型を組み立てるためには展開図が必要である。しかし円錐などの見取図から展開図を直接かくことは困難である。そこでいわゆる設計図として投影図(特に図2のような立面図)を実寸でかき、円錐や円錐台の母線の長さ(例えば図2のAB)を実測したり、円錐の底面の円周の長さや側面のおうぎ形の中心角の大きさなどを計算したりする必要がある。

さらに、自分たちが構想した通りの模型を制作するには、その過程で必要に応じて見取図や投影図と制作途中の模型とを照合しながら、

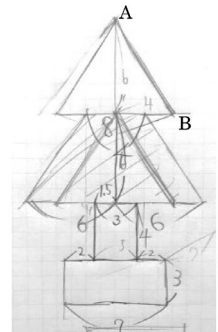


図2 立面図

繰り返し評価・改善を行って、自らの進め方を調整することも大切になる。

生徒は本教材で立体模型を制作するために、図3のような問いを連続的に表出し、既習である空間や平面における面と面、線と線、面と線の位置関係、対応関係などに着目しながら、見取図、投影図、展開図、立体模型を相互に関連付けて考察し表現していくことになる。それまでに学習した空間図形についての知識・技能を総合的に活用して探究的に学習する機会として位置付けられる。

なお、本時は模型制作を生徒のゴールとする数学的活動とするが、生徒の中には「数学的な見方・考え方」(文部科学省, 2018a)のみならず「造形的な見方・考え方」(文部科学省, 2017b)を働かせて図3における構想1の問いを表出させ、活動に臨む生徒もいると予想される。例えば模型を美しくするために複数の円錐等の稜線を平行にするなど、数学的な思考を一層促す「造形的な見方・考え方」は尊重しつつも、飾り付けを加えるなど数学的な思考につながりにくい見方・考え方は授業中には避けるように声を掛けるなど、中学校数学科としてのねらいの達成を優先する。

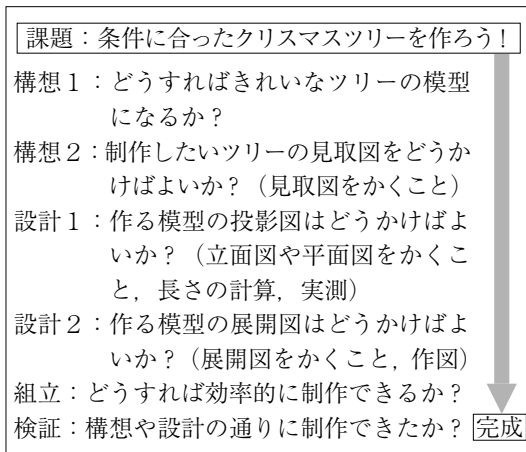


図3 主な問いの連続(単純化すると上から順)

4. 授業の実際と生徒の活動

東京都内の国立大学附属中学校1年生1クラス(男女35名)を対象に、筆者が飛び込みの授業者として、2時間扱い(令和元年12月5日, 12日)で実施した。本時まで、空間における直線や平面の位置関係、投影図、柱体・錐体の展開図は教科

書を基に通り返業で扱っているが、球の表面積・体積は扱っていない。おうぎ形の中心角と弧の長さ・面積については、本時を通して深く学ぶことができると考えて臨んだ。既習の空間図形の知識・技能を総合的に活用して考察し表現する学習として、本時を設定した。

本時の目標は2時間を通じて「立体模型を制作するために、見取図、投影図、展開図、立体模型を相互に関連付けて考察し表現することができる」である。授業で配付するワークシートはA3判とし、その最上部に図1の課題を示し、その下には展開図をかくための無地の部分と、投影図・展開図をかくための1cm方眼を薄く印刷した部分を設けた。最下部には、模型の完成後に2時間の授業を振り返って自らの気づきなどを記入できる欄(以下、「気づき欄」)を設けた。

(1) 第1時

第1時では、冒頭で教師がクリスマスツリーを手がきしたイラストを提示し、ワークシートを配付して図1の課題を提示した。完成模型は実施校や附属の幼稚園及び小学校で展示する旨を生徒に伝えた。また、生徒とやりとりしながら、イメージ図として見取図を、設計図として投影図を、模型の組み立てるために展開図をかくことを指示し、その手順をワークシートに記録させた。

その後、幅・奥行きを15cm以下、高さを20cm以下として、生徒一人一人に制作したい模型のイメージを簡易な形でかかせた。約9割の生徒は見取図を、約1割の生徒が立面図をかいており、長さを書き入れている者もいた。その後、4人程度で机を合わせて学習班になり、班で1個制作するツリーの見取図をかくように指示した。すべての班が見取図(例えば図4)をかいていたが、必要な長さを書き入れている班(C班以外)もあったため、書き入れるように指示した。ツリーの飾りに関心が向かっている班(D班)もあったため、授業中ではなく休み時間に検討するよう伝えた。

見取図から展開図を直接作ろうとする班があったが、見取図では円錐の母線の長さなど実長を表せないため、すべての班で検討していた。第1時の冒頭で、設計図として投影図をかくことを手順として伝えてはいたが、第1時終了までに方眼に立

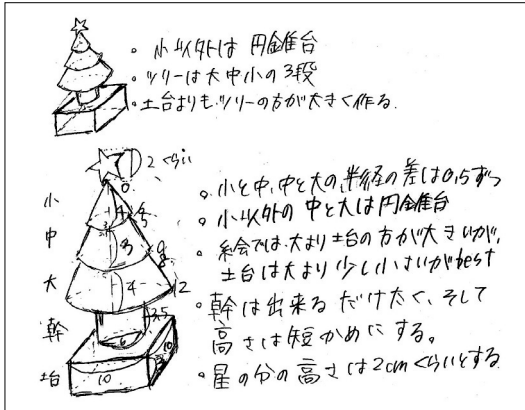


図4 F班の見取図

面図をかいたのは9つの班のうち1つのみ(F班：図5)であった。各班をまわり、進捗や疑問などを尋ねてみると、多くの生徒は展開図のおうぎ形の半径を知るために、円錐の立面図を実寸でかいて母線を実測する必要があることに気付くことができていなかった。対象の生徒たちは投影図から実際の長さ(実長)を得る経験は本時までない。

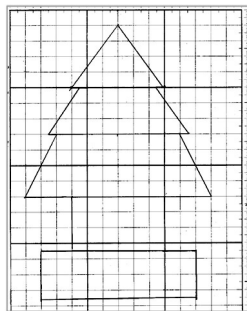


図5 F班の立面図

第1時の最後には、円錐の側面のおうぎ形の作図がうまくできていない班には、母線の長さを中心角が必要であることを強調した。高さの値を見取図に書き入れている班には、第2時まで幅・奥行きの値を書いておくように指示した。

(2) 第2時など

第2時の冒頭では、第1時の状況を踏まえ、円錐の側面のおうぎ形をかくには、母線の長さを中心角が必要であることを伝えるとともに、円に切り込みを入れた用紙を使って、中心角の求め方を具体的に例示しながら指導した。その上で、各班の活動を再開させた。

組立のために展開図をかく画用紙は生徒席の後方の机上に色別に置き、各班が必要な色をいつでも取れるようにした。授業者は机間を回り、困っていることを聞き、必要に応じて助言していった。

第2時終了までに模型が完成したのは、9つの班のうち3つの班であった(C班, F班, G班；例

えば図6)。未完成の6つの班は、翌日以降の3回の昼休みの時間を使って完成させることとなった。苦心しながらも全班が模型を完成できた。

9つの班のうち、立面図がワークシートの方眼に記録されていたのは3つあり(A, D, F班)、立面図と見取図を合わせたような図が記録されていた班が4つで(C, G, H, I班)、立面図が記録されていない班が2つであった(B, E班)。



図6 F班の完成模型

円錐及び円錐台の展開図については全体として活動時間が足りず、数学的活動としては不十分な面があった。例えば、完成へ急ぐあまり円錐の母線の長さや円錐の側面のおうぎ形の中心角の大きさを適当に決めて展開図をかく班(G班)や、中心角を計算せずに円に切り込みを入れて丸めて見た目の試行錯誤で見取図に近い円錐を作る班(E班)があった。また、立面図における二等辺三角形の頂角を決めて円錐の展開図を作った班もあった(H班)。各班の活動の概要は、表1の通りである。

表1 各班の活動の概要

班	立面図	構想と模型の整合(主な特徴)
A	あり	ほぼ一致(中心角を丁寧に計算)
B	なし	ほぼ一致(中心角を試行錯誤)
C	なし*	ほぼ一致(中心角を丁寧に計算)
D	あり	不一致(円錐と円錐台の接合ミス)
E	なし	ほぼ一致(円に切り込み)
F	あり	ほぼ一致(中心角を丁寧に計算)
G	なし*	不一致(2つの円錐の設計ミス)
H	なし*	ほぼ一致(立面図の頂角を使用)
I	なし*	ほぼ一致(教員補助で中心角計算)

「なし*」：見取図と立面図を合わせたような図

「気付き欄」には、「計算して作ったことがすごく楽しくて図形と計算がつながるとおもしろくなりました」などの活動の楽しさに触れた記述、「円錐の高さを決めているだけだととても時間がかかり、おうぎ形の半径が変になってしまったので、次は半径と中心角も決めてから作るべきだと実感

しました」などの展開図に必要な構成要素に関わる記述、「円錐台の展開図の作図が大変だった. 2種類の半径を計算したり, 中心角を求めたりと普通の円錐よりも難しかった. でもその分できた時, ピッタリ合った時の達成感がすごかった!」という円錐台に関わる記述などがあつた.

5. 特徴的な活動とその考察

(1) 見取図と立面図を合わせたような図を基に母線の長さを実測して模型を制作したC班

C班はまず, 高さや幅などの条件に合うツリーの見取図をかいた. その際, 上側の円錐の高さを6cm, 幅・奥行きを8cmとしていた. 円錐の母線の長さが求められないことに気づき, 「母線の長さを高さにしてみる(仮)」とし, 展開図のおうぎ形の中心角を240°として求めた(図7). その後, 筆者から配付された方眼

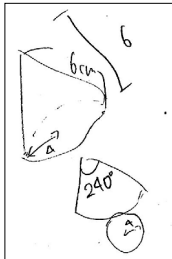


図7 C班の試作模型の見取図と展開図

紙に半径6cm, 中心角240°のおうぎ形を正確にかき, 切り取って丸めていた. ここで筆者から, 構想したイメージと実際の試作模型とが一致しているかどうかの検証を促す声かけをした. 以下がそのときのやりとりである.

T : 「どうかな, (作ってみると構想していたものと) 同じ長さになってる?」

S1 : 「高さを6cmにしようとしたんですけど, 母線を6cmにしたら・・・めっちゃ小さいよ。」

T : 「母線の長さがわからなかったら, 実際にかいてみたらどう。」

S1 : 「あー。」

その後, ワークシートの方眼に実寸で見取図をかき, 母線の長さを7.3cmと実測した. 第2時には試行錯誤しながら中心角を198°と計算で求めた(図8の左下). さらに下側の円錐を上側の円錐の底面に穴を空けて差し込むなどしてつなげ, 図9の模型を完成させた.

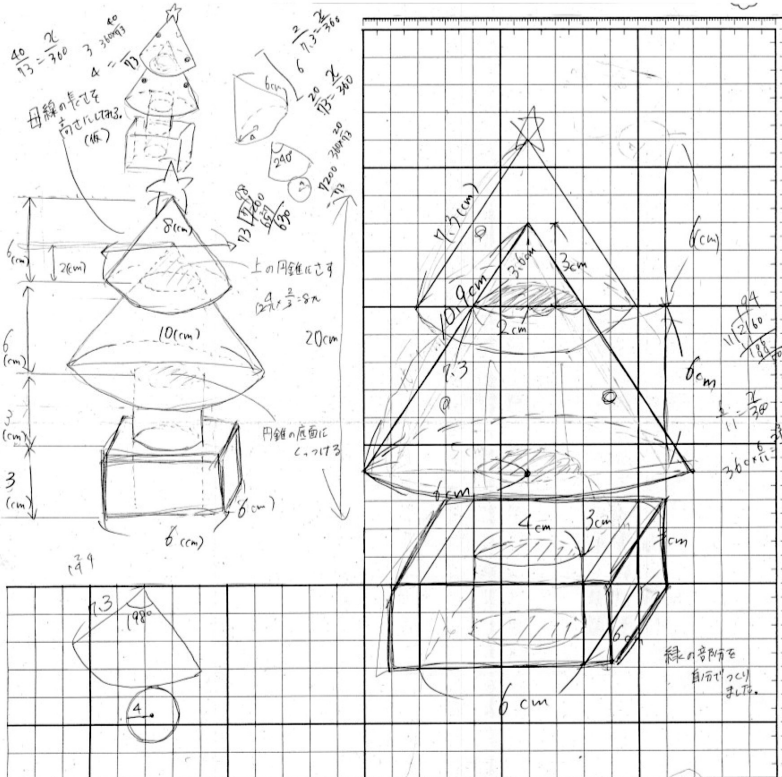


図8 C班の生徒のワークシート

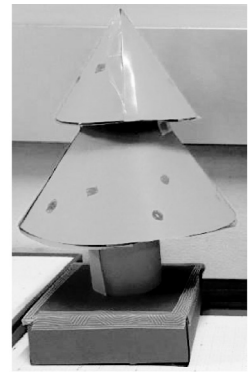


図9 C班の完成模型

C班は, 試作模型を作つて検証するなどしながら, 平面と空間を相互に関連付けて考えを評価・改善し, 最初に構想した立体の模型をうまく制作できた. その鍵となったプロセスは, 求められない母線を具体的な長さで仮に置いて試作模型を作り, これを観察して妥当性を検証した

ことであろう。C班の生徒の「気づき欄」には「母線の長さは、もっている計算の知識では出せなくても、実際に同じ大きさの設計図を描いて母線をはかれば出せるということ」という記述があった。

なお、授業後に図8をかいた生徒に図8の見取図と立体図を合わせたような図をかいた理由を尋ねると、「見取図を実際の大きさに描けば母線の長さがわかると思ったから」と答えた。図8の「7.3cm」と書かれた長さについては、部分的に投影していると解釈できる。

図8のような見取図と立体図を合わせたような図に改めて目を向けると、簡潔な数学的表現である立面図を生徒が構成していく途中段階にある図とみることができる。このような図をきっかけとして構成要素を徐々に捨象し、立面図として簡潔に表していくことや、投影図には実長がわかるというよさがあることを理解させるなど、効果的な指導につなげることができると考えられる。

なお、C班を含む4つの班が見取図と立面図を合わせたような図をかくという実態は、模型制作

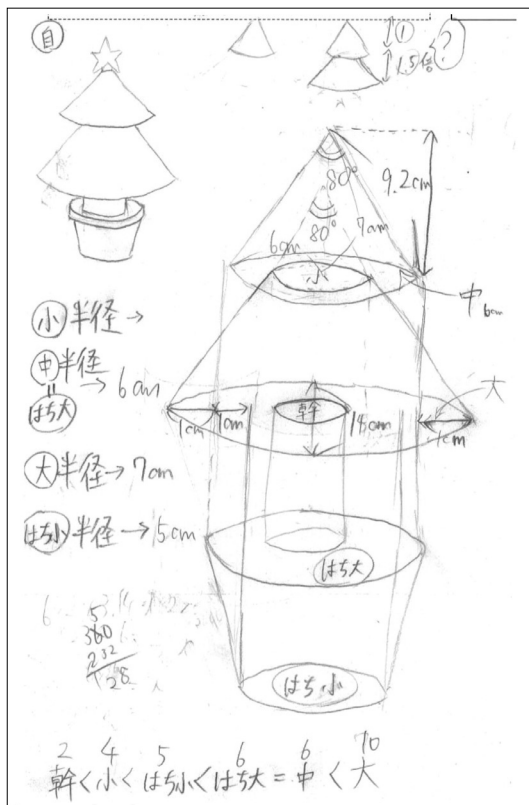


図10 H班の生徒のワークシート

のために平面と空間を相互に関連付けて考察し表現する本実践を通してあぶり出された興味深い生徒の実態である。この実態は、空間図形の知識・技能を総合的に活用して考える場面を設けたからこそ現われたものであると考えられる。

(2) 円錐の立面図に現われる二等辺三角形の頂角を80°と決めて模型を制作したH班

図10はH班の生徒が話し合いながらかいたワークシートである。作ろうとしているツリー模型の見取図に長さや角の大きさが記されている。ツリーの上側の円錐の2本の稜線でなす角(立面図をかいたときの二等辺三角形の頂角)を80°と決めて設計していた。

ところが、その展開図をどのようにかけばよいかかわからず、第2時では授業者である筆者に助けを求めてきた。そこで、残り時間がわずかだったことから、筆者が展開図をかき手伝いをしながら、生徒自身で展開図を考えていった。図11は、立面図である頂角

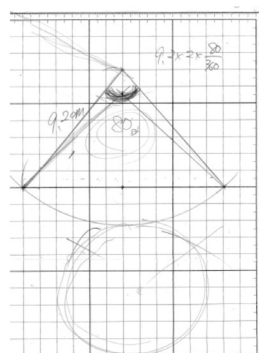
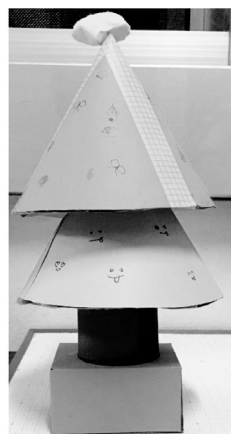


図11 H班のかいた図

80°、高さ7cmの二等辺三角形を筆者の問いかけのもとに生徒が考えながらかいたものである。二等辺三角形の等辺の長さを定規で測って約9.2cmと見だし、底辺の長さは約12cm(円錐の底面の半径は6cm)であることも目盛りから読み取っているの、図10の上側の円錐における



「9.2cm」「6cm」は、図11 図12 H班の完成模型をかいた後に書き入れたものである。これらの値を基にして側面のおうぎ形の中心角を求め、これを作ったり、底面の展開図となる円をかいたりして模型を作っていた。時間に余裕がなくなり、構想した2段目の円錐は1段目と同じものを重ねるつくり方に変えたり、鉢を円錐台から正四角柱に変え

たりして完成した(図12)。H班の生徒の「気付き欄」には「ツリーがバランスよく美しく見えるようにどの直径(長さ)にすれば上の葉と下の葉がバランスよくなるか、また、葉の部分のかさ(?)の角度が何度になればツリーっぽくなるかを考え、条件に合う美しいツリーになるように工夫した。」との記述があった。

条件に合う美しいツリーを作るために「葉の部分のかさ(?)の角度が何度になればツリーっぽくなるか」を考えた様子が窺える。これは、円錐の立面図である二等辺三角形の頂角を決めることは、生徒の美的感覚を数学的に表現することに基づいており、ごく自然な発想である。しかしながら、共同研究者との事前研究会において、このH班のような生徒の反応は予想していなかったものである。「円錐の立面図である二等辺三角形の頂角を 80° と決めるとき、展開図はどうかければよいのか」は、生徒全体で考えさせる価値がある興味深い問いであると考えられる。

6. 研究のまとめ

(1) 主な知見

① 教材「クリスマスツリーを作ろう!」を取り上げる価値

本教材を扱った本時では、模型を作りながら考え、考えながら模型を作るといった、平面と空間を相互に関連付けて考察し表現する探究的な姿が観察された。生徒一人一人の着想から始まって構想したクリスマスツリーの模型を協働的に作り上げる一連の活動からは、空間図形の学習に対する生徒の主体性が強く感じられた。

その過程において生徒は、空間や平面における面や線の位置関係及び対応関係に着目しながら、見取図や投影図、立面図などを主体的にかくことを通して平面と空間を相互に関連付けて考察した。特に、立面図の必要性(②で後述)、立面図を基にした実長の重要性、円錐の側面のおうぎ形の展開図について経験的に理解する貴重な機会となった。本教材は、生徒の目的に沿って平面と空間を相互に関連付ける学習を促す価値があるといえる。

② 興味深い生徒の実態

本時を通して、模型制作のために実長が知りた

い場面でも、立面図をかくのではなく、見取図と立面図を合わせたような図をかく生徒が多いという実態が見られた。第1時で立面図をかいた班が少なかったことから、一部の実長が保存されるという投影図のよさを多くの生徒が実感できておらず、立面図をかく必要性を感じていないと推察される。

見取図と立面図を合わせたような図でも実長がわかるが、余計な情報も加わっており、簡潔・明瞭とはいえない。本時以前の学習で投影図の意味は理解していたとしても、投影図の必要性について十分に理解できていなかった可能性がある。その改善のためには、高さと底面の半径が定められた円錐の見取図から展開図を制作する過程で、必要性を感じながら投影図をかく学習を単元に位置付けることが考えられる。その後、本教材のように、円錐や円錐台、円柱など複数の空間図形を組み合わせる学習活動に発展させれば、生徒にとっての負荷が下がり、学習が一層円滑になるであろう。

③ 多様な考えや問いの表出

本時では、事前研究会で予想していなかった生徒の反応もあった。円錐の立面図をかいたときの頂角の大きさを決めてから展開図をつくらうとするという考えである。この考えに基づく「円錐の立面図である二等辺三角形の頂角を具体的に決めるとき、展開図はどうかければよいのか」という問いは、多くの生徒が抱いていた「円錐の見取図から展開図をどうかければよいのか」という問いと同様に、生徒全体で考えさせる価値があるものであると考えられる。

(2) 学習指導計画の提案

上記①、②、③を踏まえ、本教材を取り上げて表2の学習指導計画(3時間扱い)を考案した。

表2の学習指導計画のような、投影や展開などを通して空間図形の知識・技能を総合的に活用して考察し表現する一連の学習を、単元の後半に位置付けることを筆者は提案する。それにより、生徒に理解させにくかった投影図の必要性を経験的に理解させることができるとともに、平面と空間を相互に関連付けて考察し表現する力が生徒に身に付くのではないかと考える。

表2 本教材を取り上げた学習指導計画

<p>【第1時】 図1の課題を提示し、生徒が制作したいクリスマスツリーを構想し、その見取図をかく。展開図をかく過程で困っていることなど、各班での問いを発表、共有する。 [想定される問いの例] ・円錐の高さと半径の長さから、円錐の側面となるおうぎ形の半径や中心角を知るにはどうすればよいか？ ・円錐の立面図となる二等辺三角形の頂角の大きさと高さから、円錐の側面となるおうぎ形の半径や中心角を知るにはどうすればよいか？</p>
<p>【第2時】 第1時で共有した問いについて協働的に考える。画用紙を使っておうぎ形の中心角と円錐の開き具合を体験的に理解するなど、多様な問いを全員で順に考えていくことによって、円錐などの展開図や投影図について目的的に学ぶ。</p>
<p>【第3時】 制作しなかったクリスマスツリーの模型を設計して作る。制作の過程を振り返り、どのような問いに答えることでどのような数学的な事実がわかったかを自覚化する。</p>

(3) 今後の課題

今後の課題として、本研究で考案した学習指導計画案(表2)を「空間図形」単元に位置付けて実践し、その意義と限界を検証することなどが挙げられる。

なお、現行の中学校数学科教科書の章構成の順序で学習指導を行う場合、「空間図形」単元の実施は1、2月あたりになる可能性が高く、クリスマスツリー模型を制作する本教材は季節外れとなる可能性が高い。しかし、例えば愛媛県新居浜市の「愛媛県総合科学博物館」や熊本県宇城市三角町の「三角港フェリーターミナル(海のピラミッド)」のような地域にある建築物などを題材にし、正面などから撮影した画像を基にすれば、単一の円錐や複数の円錐を組み合わせたような模型を制作するこ

とにつながり、本教材と同じ学習のねらいを達成することができる。美術科や総合的な学習の時間と連携するなどして、各学校に合わせてカリキュラムをデザインして、本研究の知見を生かした学習指導を効果的に実施していくことも考えられる。

注

本研究は、第102回算数・数学教育研究(茨城)大会で誌上発表した内容(藤原ほか(2020))を、詳細に整理したものである。

引用・参考文献

藤原大樹(2018)「単元を貫く数学的活動」でつくる中学校数学の新授業プラン。明治図書。66-67。
 藤原大樹・水谷尚人・山崎浩二・鈴木康志・國宗進・鈴木誠・小石沢勝之(2020)。「中1での図形指導の改善-立体模型作製を通じた異なる平面表現の関連付け-」。日本数学教育学会第102回大会発表要旨集(茨城大会)。184。
 本田千春・西村圭一(2007)。「空間思考力の育成をめざす授業に関する研究-地図から風景をスケッチする教材を用いて-」。日本数学教育学会誌第87巻第7号。13-20。
 國宗進(2007)。「小学校算数、中学校数学、高校数学の接続を重視した幾何教育の改善に関する研究(課題番号16530578)」。平成16~平成18年度科学研究費補助金(基盤研究(C))研究成果報告書。
 近藤裕・國宗進・熊倉啓之・八田弘恵・望月美樹(2011)。「空間図形についての理解に関する研究-立体の切り口の授業を通して-」。第44回数学教育論文発表会論文集。489-494。
 文部科学省(2018a)。「中学校学習指導要領解説数学編」。日本文教出版。
 文部科学省(2018b)。「中学校学習指導要領解説美術編」。日本文教出版。
 島田茂(1990)。「教師のための問題集」。共立出版。94-96。
 杉山吉茂(1995)。「中等科数学科教育序説」。東洋館出版社。227-254。