

複数の ICT を活用した関数領域における数学的モデリング

藤原 大樹
お茶の水女子大学附属中学校

要 約

本研究では、「リレーのバトンプラス」教材を取り上げ、中学校関数領域における新たな数学（二次方程式の重解条件）を生み出す数学的モデリングの授業について、藤原(2015)で示した単元指導計画を基に複数の ICT の活用を前提として構想し、実践した。その結果、特に場面を数学的モデルで表すための試行の繰り返し、及び多様な数学的モデルや多様な思考プロセスの瞬時の共有化が容易に行われ、生徒の思考を促したり深めたりできることが事例的に示された。その一方で、多くの ICT を複合的に用いる際に生じる操作の煩雑さが課題である。このことは、授業中の生徒一人一人へのきめ細やかな指導と評価において障壁となり得る。この点の克服が、ICT 開発者と授業者に求められる。

キーワード 数学的モデリング, ICT, 関数領域, 数学を生み出す

1. 研究の背景と目的・方法

現在、自立・協働・創造をキーワードとして、新しい学習指導要領の改訂が進んでいる。算数・数学科においては、数学的モデリング（以下、モデリング）の位置付けが一層大きく、また一層明確になる方向性にある(中央教育審議会教育課程企画特別部会, 2015; 日本数学教育学会教育課程委員会, 2016)。

数学の理解や思考は、具体と抽象など2つの世界を往還することによってより豊かになっていく(島田, 1977; 池田・藤原, 2016)。この考えを基に、藤原(2015)では、新たな数学を生み出すためのモデリングの指導について検討した。第3学年の「関数 $y=ax^2$ 」単元で教材「リレーのバトンプラス」(大澤, 1997)を扱い、グラフ描画ソフト GRAPES を活用した協働的な解決、及び多様な解決方法の比較・検討を重視して実践した。その結果、生徒は既習の関数のグラフを用いた視覚的・近似的な解決を端緒に、簡潔さや正確さを志向して、未習である二次方程式の重解条件を自ら生み出した。またその中で、新たな ICT 活用と中3「関数 $y=ax^2$ 」の単元指導計画案を示した。

本研究では、関数領域における新たな数学

を生み出すモデリングの授業について、藤原(2015)の単元指導計画を基に、複数の ICT の活用を前提として授業を構想・実践し、その成果と課題を検討することを目的とする。

2. 授業の構想

(1)教材について

本研究で扱う「リレーのバトンプラス」は、「陸上競技のリレーで前走者が次走者にバトンプラスをする際、前走者が何m手前まで近付いた瞬間に次走者が走り始めればよいか」を求める、保健体育科と関連するモデリング教材である(大澤, 1996)。図1の問題を取り上げ、ある変域の中で、前走者、次走者が走る時間 x と距離 y の関係を一次関数や関数 $y=ax^2$

附属高校陸上部のリレーの選手であるはじめさん（次走者）とひさしさん（前走者）は、お互いのラップ記録をとって、理想的なバトンプラスを行う方法を考えることにしました。ひさしさんたちははじめさんが短距離走でスタートしてから走った距離を、0.5秒ごとに4秒間測定しました。

| | | | | | | | | | |
|--------|---|-----|-----|-----|-----|------|------|------|------|
| 時間 (秒) | 0 | 0.5 | 1.0 | 1.5 | 2.0 | 2.5 | 3.0 | 3.5 | 4.0 |
| 距離 (m) | 0 | 0.5 | 2.0 | 4.6 | 7.9 | 12.6 | 17.4 | 22.1 | 26.9 |

また、ひさしさんの全力疾走は、
「テイクオーバーゾーンあたりまで来て等速 (8m/秒) で走るとみなすことができます」とデータからわかっています。
あなたは陸上部のコーチです。他のコーチと協力をして、ひさしさんが何 m 手前まで近付いたときにはじめさんがスタートすれば理想的なバトンプラスになるかをアドバイスしよう！

図1 提示する問題

で近似し、グラフ描画ソフトやグラフ電卓を

用いるなどして、2人のグラフが接するときの一次関数の切片を、視覚的・近似的に求めることが問題の主要な解決である(図2)。

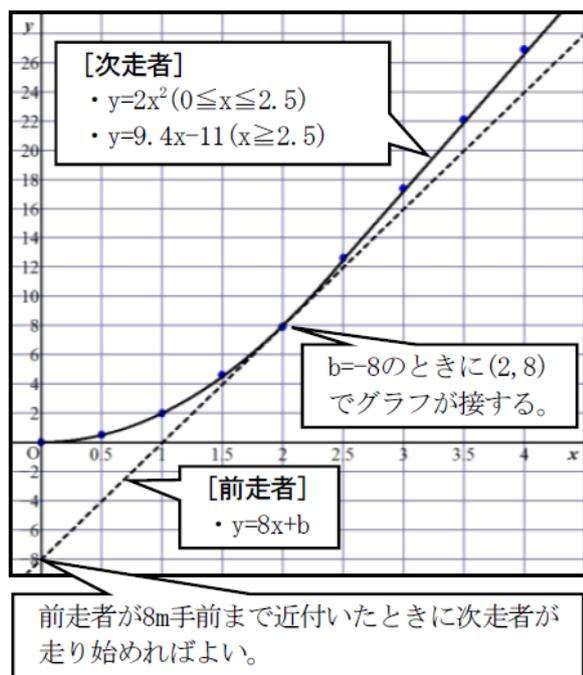


図2 グラフによる視覚的・近似的な解決

本教材を通して、主にグラフと事象の関連を理解すること、理想化・単純化して考えるよさを実感することが期待される。また、煩雑な作業を避ける意図で「グラフをかかないで計算だけで求められないのか」という簡潔さや正確さに向けた問いが生徒から生まれれば、一次関数と関数 $y=ax^2$ の接点の y 座標が等しいことから x についての二次方程式を立て、その重解条件「二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ で $b^2-4ac=0$ のとき重解をもつ」(未習 高等学校数学科)を生徒自ら見いだすことが期待される。藤原(2015)では、12グループ中の4グループがこれを見いだしたと報告している。

(2) ICT 活用の目的

ICT は、授業のねらいに沿って活用されることが肝要である。ICT を活用した教育の推進に関する懇談会(2014)では、ICT の活用により容易となる学習場面の例として、次の3つを挙げている。

- ① 距離や時間を問わずに児童生徒の思考の過程や結果を可視化すること【思考の可視化】
- ② 教室やグループでの大勢の考えを、距離を問わずに瞬時に共有すること【瞬時の共有化】
- ③ 観察・調査したデータなどを入力し、図やグラフ等を作成するなどを繰り返し行い試行錯誤すること【試行の繰り返し】

中学校関数領域の学習場で解釈すると、上記①は例えば、2つの変数の関係を視覚的に捉えるために、GRAPESを用いて座標平面上に点をとったりその多くを通るような既習のグラフを表示させたりすることが考えられる。上記②は例えば、生徒がGRAPESで表示させたグラフや紙にデジタルペンで書いた数学的な表現や説明を電子黒板に瞬時に表示し共有したり比較・検討したりすることが考えられる。上記③は例えば、GRAPESで条件に合う一次関数 $y=ax+b$ のグラフを表示させるために、見当をつけながら a や b の値を繰り返し変化させて試行錯誤することが考えられる。

なお、GRAPESはフリーのグラフ描画ソフトで、座標平面上に点を打ったり式を入力してグラフを表示したりすることができる。InterCLASS(CHJeru)は生徒のタブレットPCの画面を教師用PCや電子黒板で一覧したり複数の画面を並べて表示したりすることができる授業支援システムである。デジタルペン(大日本印刷)は、紙に書いた情報をペン先のカメラで読み込み、デジタル情報に変換することができるペンである。その情報をBluetoothでタブレットPCや電子黒板に転送すれば、閲覧ソフトOpenNOTE(大日本印刷)でその記述を閲覧したり記述の一部を切り取って並べて表示したりすることができる。

生徒主導のモデリングの授業では、設定した条件・仮定、優先した社会的な価値観、思考したプロセスなどで多様な解決が想定される。これらを認め、生かして授業をつくって

いくことがこれからは求められる(佐伯, 2014). 上記の ICT は, 生徒の多様な解決を促したり共有化したりする上で有効に働くと判断した. 本研究では, 上記①~③の目的に対応させて, 表 1 の ICT の活用を検討する.

(3) 単元構成の工夫

| ICT 活用の目的 | 活用する ICT |
|-----------|---------------------------------|
| ①思考の可視化 | デジタルペン, OpenNOTE, GRAPES |
| ②瞬時の共有化 | デジタルペン, OpenNOTE, InterCLASS |
| ③試行の繰り返し | GRAPES |

藤原(2015)では, 「リレーのバトンパス」の授業から得られた成果と課題を踏まえ, 単元を通じて数学と現実という 2 つの世界を生徒

の思考が往還することを想定し, 単元指導計画の案を示した. この案に一部加筆したものが表 2 である.

本研究では, 複数の ICT を複合的に活用しながら, 表 2 の単元指導計画にしたがって授業を構成する. 具体的には, 第 1 時, 第 5・6 時, 第 13 時で扱う現実の世界(及び現実的な世界)の問題の解決に GRAPES を使用させる. それにより, 使用回数を重ねると, 生徒が目的や必要に応じて主体的に GRAPES を使用できると期待される. また, これらの授業で生徒が GRAPES で表示させたグラフの画面やデジタルペンでワークシートにかいた数学的な表現を瞬時に電子黒板へ転送し, 共有・比較・検討して, 考えの評価・改善に生かすようにする.

なお, 第 13 時に深く関わる第 5 時の板書

| | |
|--|--------------------------|
| <p>[第1時]</p> <p>理科の実験データを関数で近似できるだろうか?</p> <p>・GRAPESを活用し,理科の「物体の運動」の実験データの関係を一次関数や関数$y=ax^2$のグラフで近似する. ・身の回りには$y=ax^2$で表される事象があることを知る.</p> | <p>現実の世界</p> <p>ICT</p> |
| <p>[第2-4時]</p> <p>関数$y=ax^2$の特徴を多様に見つけよう。</p> <p>・関数$y=2x, y=2x^2$で,その表やグラフを比較して,特徴を見いだす.見いだした特徴とその理由を説明する. ・関数$y=2x^2, y=-2x^2$で,その表やグラフを比較して,特徴を見いだす.見いだした特徴とその理由を説明する. ・見いだした特徴が他の関数$y=ax^2$で成り立つか調べる. ・練習問題に取り組む.</p> | <p>数学の世界</p> |
| <p>[第5-9時]</p> <p>陸上のウサイン・ボルト選手の100m走はどのような走りになっているだろうか。</p> <p>・GRAPESを活用して,選手の走った時間と距離の関係を,変域のある複数の関数を組み合わせて近似する. ・近似した関数で,変化の割合や平均の速さを調べる. ・平均の速さから,速さの変化の様子を説明する. ・xの変域のある関数$y=ax^2$の,yの変域を求める. ・練習問題に取り組む.</p> | <p>現実の世界</p> <p>ICT</p> |
| <p>[第10-12時]</p> <p>関数と図形との関連について考えてみよう。</p> <p>・長方形などにおける動点の問題など,図形における2つの変数の関係を関数として見る問題に取り組む. ・求積や面積比の問題など,関数のグラフや軸で囲まれた領域を図形として見る問題に取り組む.</p> | <p>数学の世界</p> |
| <p>[第13時]</p> <p>Aさん(前走者)がBさん(次走者)に陸上リレー種目でバトンパスをするとき, Aさんが何m手前まできたときにBさんが走り始めるのが理想的か。</p> <p>・第5時のように,既習の関数で近似する. ・何mかを求める方法を話し合い記述する. ・視覚的,近似的な解決方法,解の公式を用いた解決方法など,多様な方法を共有し,比較・分類する. ・他者の考えや新たな気づきを加筆する.</p> | <p>現実的な世界</p> <p>ICT</p> |
| <p>[第14時]</p> <p>身の回りには,他にどんな関数があるのだろうか。</p> <p>・郵便物の料金設定,バクテリアの増加についての問題に取り組む。</p> | <p>現実の世界</p> |

表 2 単元指導計画の案(藤原(2015)を加筆)

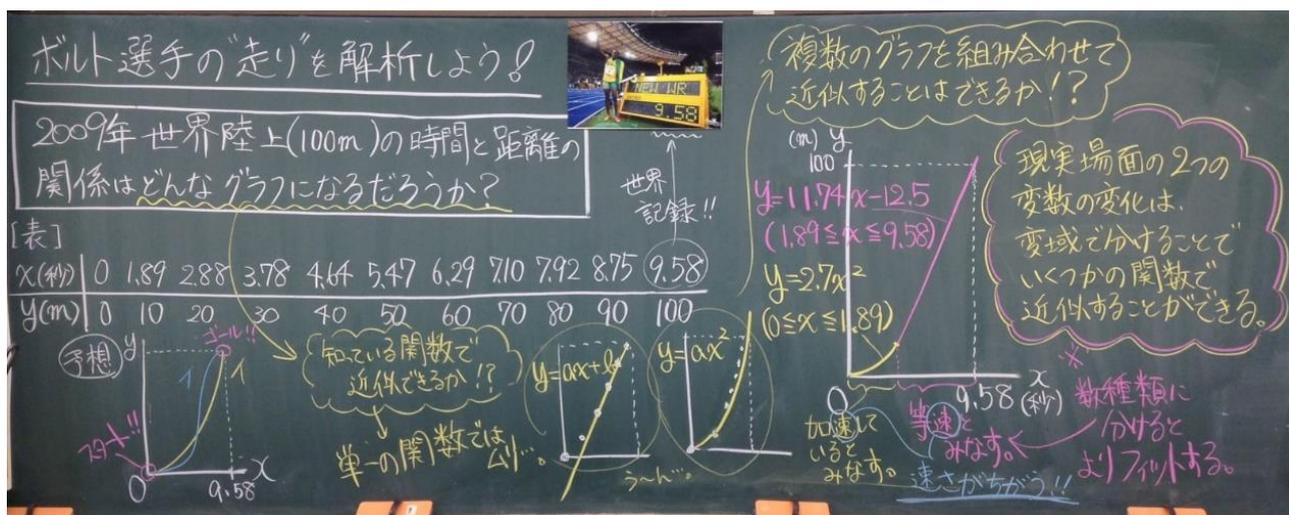


図3 第5時の板書

は表2,第5時のGRAPESの画面の例は図3のとおりである(池田・藤原,2016 p.122, pp.138-139). Web上のウサイン・ボルト選手のラップ・タイムを基にGRAPESの座標平面上に11個の点を取り, $y=ax^2$ における比例定数aの値や $y=bx+c$ における傾きb及び切片cの値を変化させたり変域を設定したりして,グループで意見交換しながらよりフィットする関数の式を試行錯誤していくものである. 現実世界のデータを取り上げ,陸上選手の短距離走の時間と距離が変域のある関数 $y=ax^2$ と一次関数で近似できることを第5時で理解させ,この経験を第13時の活動の礎としたい.

スで,平成26年2月に行った. まず実際のリレーの映像を見せて場面の理解を促した上で,図1の問題を提示した. その上で4人程度のグループになり,必要に応じてタブレットPCのGRAPESを使って解決していった.

例えば,9班は解決の見通しが立たない生徒もおり,数学が得意なDh生のPC画面をのぞき込んで話合いながら解決を進めていった(図5). 第5時のノートを開いて振り返りつつ,後走者である「はじめ」の時間と距離の点にフィットする関数の式を試行錯誤して探す場面も見られた.



図5 グループによる解決を始め頃の9班

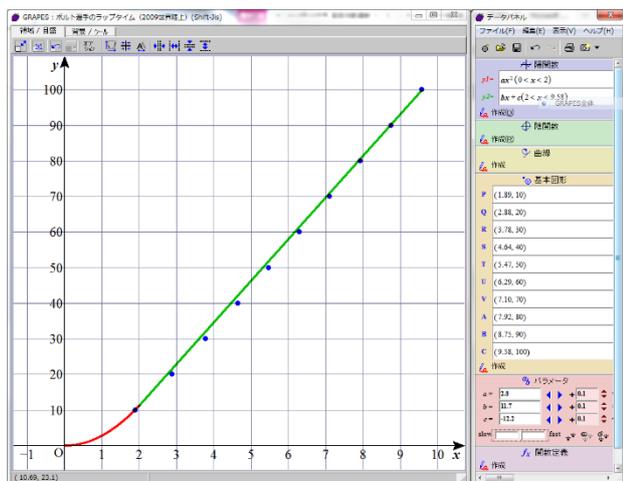


図4 第5時のGRAPESの生徒画面の例

全体としては,第5時の経験を基に後走者である「はじめ」の関数を近似できている様子であるが,前走者である「ひさし」の直線のグラフを座標平面上にどう表現すればよいのかが共通の課題であるように思われた. そこで,生徒たちの活動を一旦止めさせ,何人かのGRAPESの画面やワークシートへの記述をStarboardやOpenNOTEで一覧表示して生徒とともに見ていった(図6).

その上で,「はじめ」と「ひさし」のグラフ

3. 授業(第13時)の実際

第13時は,神奈川県内国立中学校1クラ

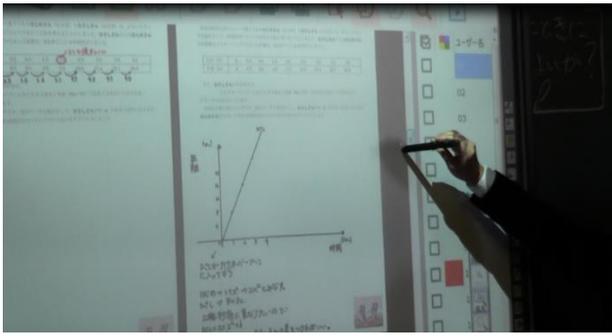


図 6 OpenNOTE で記述を共有化する授業者

が、原点を含む 2 点で交わっている Sao 生の画面を InterCLASS で電子黒板に映し出し、そのグラフと考えを Sao 生に自席で説明させた (図 7). Sao

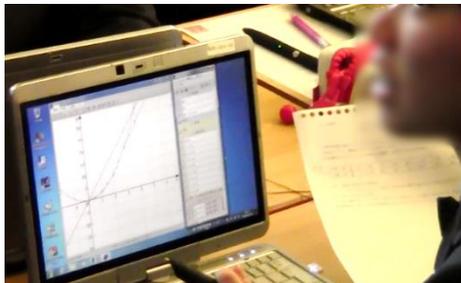


図 7 考えを説明する Sao 生

生は、「はじめ」の走りは二次関数 $y = 2x^2$ と一次関数 $y = 8x$ とで近似できるということと、原点ではない方の交点の座標がバトンパスの時間と位置を示していることを述べた。聞いている生徒は、納得の表情を見せる者が多かった。ここで授業者は、電子黒板に映し出した Sao 生の画面に書き込みながら、原点でない方の交点が 2

人の走者が同じ時間に同じ位置にいることを表していることを全体に確認した。その上で、原点で交わっているということはどういうことなのか、2 点で交わっていてよいのかを生徒たちに問いかけ、グループ活動を再開させた (図

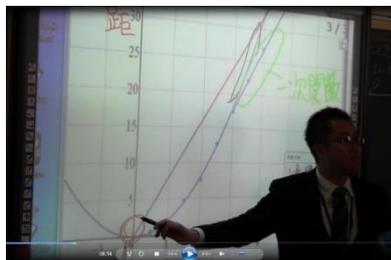


図 8 原点で交わることの意味を問う授業者

8). Sao 生が説明した考えは、誤りを含んでいる。この考えを「たたき台」(池田・藤原, 2016 p.13)として捉え、これを生かして評価・改善

していくことを意図したのである。その結果、各グループで話し合いが活発に行われ (図 9), グラフが 2 点で交わることは、「ひさし」が「はじめ」を一度追い抜いて、その後に「はじめ」が「ひさし」を再び追い抜くという、ロスの多い場面を表していることに気付いていった。その後、「ひさし」の直線のグラフを平行移動させて考える班などが現れていた。



図 9 活発に議論する 9 班, 10 班の様子

机間指導を通して、「はじめ」と「ひさし」のグラフが接するとき、「ひさし」の直線のグラフの切片に着目するグループが増えてきたことを見取り、3 班の Rn 生の GRAPES の画面を表示させ、電子黒板の前で説明させた。Rn 生は、2 人のグラフが 2 点で交わるような場面がバトンパスとしては時間のロスがあること、及び $y = 8x + c$ のグラフを c を変えて平行移動させて、2 人のグラフが接して見えるように試行錯誤したことを説明した (図 10). 同様に解決した生徒を中心に、納得の表情が多かった。

次に、グラフを基に、式を用いて考えた 9 班の考えを共有する意図で、Dh 生のデジタルペンでの記述

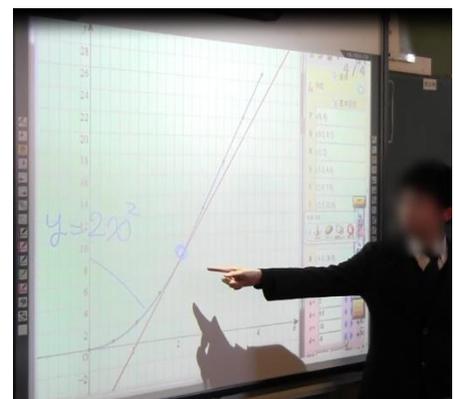


図 10 グラフによる視覚的・近似的な解決を説明する Rn

を OpenNOTE で電子黒板に表示し、説明させた (図 10). Dh 生は、2 つのグラフが接することは、2 つの式から等置法で得られた二次方程式の解が 1 つしかないことであるこ

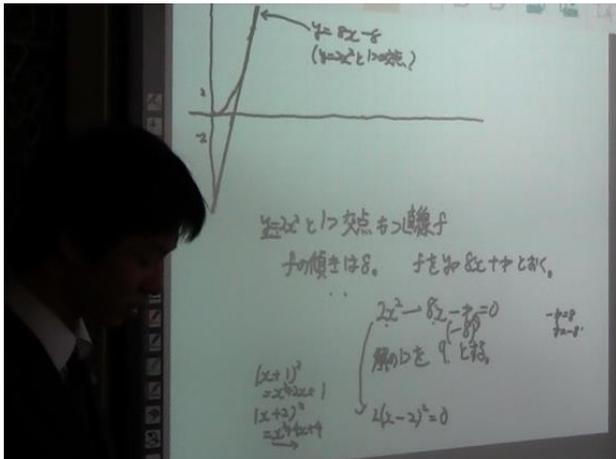


図 10 式を用いて説明した Dh 生

と、及び平方完成を使ってつじつまを合わせれば直線の切片が計算で求められ

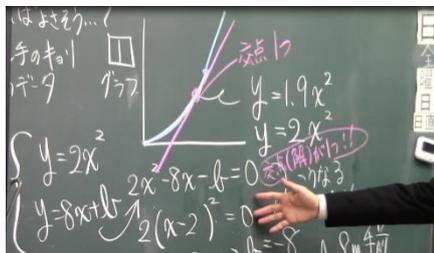


図 11 板書で補足する授業者

ることを説明した。理解が不十分な表情をしている生徒も見受けられたため、授業者が板書して補足し、理解を深めた。授業の最後には、

- ・ 解決のためには、座標平面上に打った多くの点を通るように既習の関数のグラフで近似することに加え、2つのグラフの交点や上下関係を場面に即して解釈し考察することが重要であること
- ・ 見た目ではなく正確に求めるには、グラフより式を用いて考察する必要があること
- ・ よりよい解決のためには、腕の長さなども考慮に入れ必要があること
- ・ 本時の学習が高等学校数学科へつながっていること

についてやりとりしてから授業を終えた。

4. 本研究の成果と課題

本時(第13時)では、ICTの活用を前提として授業を実施した。その結果、特に場面を数学的モデルで表すための試行の繰り返し、及び多様な数学的モデルや思考プロセスの瞬時

の共有化が容易に行われ、生徒の思考を促したり深めたりすることが事例的に示された。

一方で、複数のICTの複合的な活用は、操作が極めて煩雑であった。本時で授業者は、特に机間指導で生徒各自をきめ細やかに評価し、その後の指導に生かすという点が不十分であるという実感が残った。ICTを活用した授業の日常化に向けて、この点の克服がICT開発者と授業者とに求められる。

引用・参考文献

- 中央教育審議会教育課程企画特別部会(2015)「論点整理」, p.37.
- 藤原大樹(2015)「生徒が新たな数学を生み出す数学的モデリングの指導ー中学校数科の関領域に着目してー」, 日本科学教育学会年会論文集 39, pp.101-104.
- ICTを活用した教育の推進に関する懇談会(2014)「「ICTを活用した教育の推進に関する懇談会」報告書(中間まとめ)」, pp.6-7.
- 池田敏和・藤原大樹(2016)『数学的活動の再考』, 学校図書.
- 日本数学教育学会教育課程委員会(2015)「学習指導要領改訂に向けた算数・数学の教育課程論の展開」, 日本数学教育学会誌第 97 巻第 12 号, pp.47-80.
- 佐伯昭彦(2013)「日本における数学的モデリング研究の動向と今後の課題」, 日本数学教育学会「第 1 回春季大会論文集」, pp.33-38.
- 島田茂(1977)『算数・数学科のオープンエンドアプローチ』, みずうみ書房, pp.14-21.
- 大澤弘典(1996)「現実場面に基づく問題解決ーグラフ電卓を利用した合科的授業展開を通してー」, 日本数学教育学会誌第 78 巻第 9 号, pp.248-255.