

数学②コース：図形と遊ぼう！作図で広がる想像力

数学科 阿部 真由美 十九浦 美里

1. はじめに

今回は「作図」をテーマとして、相似や平方根、三平方の定理などの必要な知識を説明しつつ、正五角形の作図を目標にした。参加者は、中学3年生12名、中学2年生8名の合計20名であった。中学2年生の既習範囲を考えると、相似や平方根の計算は未習のため、中3と中2が程よく混ざるような4人グループを作り協力して取り組んだ。当日の授業の内容を以下に示す。

2. 授業の内容

★ 準備（簡単な作業も交えながら、作図に必要な知識を確認していく）

①基本の作図（線分ABの垂直二等分線・角XOYの二等分線・点Pを通る直線ℓの垂線）について確認し、グループごとに答え合わせをする。

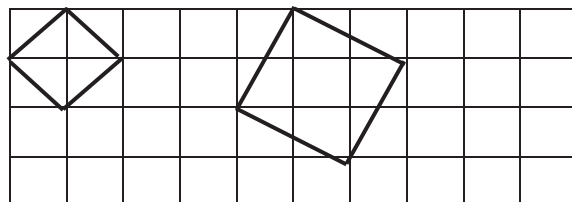
②三角形の「合同」と「相似」について、定義や記号（ $\equiv$, $\sim$ ）を確認する。

③「平方根」について

『 $a \geq 0$ とする。2乗すると a になる数を a の平方根という。 a の平方根のうち正の方を $\sqrt{a}$ とあらわす。』

このことを用いて、1目盛りが1であるマス目を使って、面積が2である正方形を作ることにより、 $\sqrt{2}$ の長さを作図する。同様に $\sqrt{5}$ の長さも作図する。

分かった人が出たら、グループで共有し、代表者に前に出て発表してもらった。 $\sqrt{2}$ はすぐにわかったようだが、 $\sqrt{5}$ は試行錯誤が必要で時間がかかっていた。

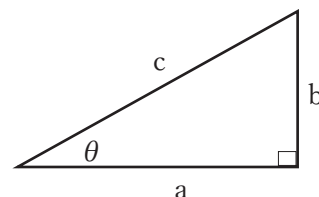


④三平方の定理

直角三角形の辺の長さに関する定理

右の直角三角形において、 $a^2 + b^2 = c^2$ が成り立つ。

（証明はせず、いくつかの例を用いて、使い方の確認。後半で、三平方の定理を使って、作図したり、線分の長さを求めたりすることになる）



★本日の本題「正五角形の作図」

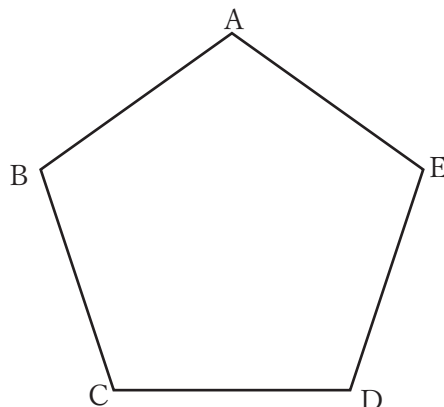
①正五角形を分析してみよう。

正五角形の一つの内角は 108°

対角線 AC, AD を引くと、 $\angle A$ は 36° に三等分される。

対角線 AD と CE の交点を F とすると、

$\triangle ACD \sim \triangle CDF$ ($\sim \triangle AFE$) であることがわかる



(黄金三角形という用語も確認した)

ここで $CD=1$ とし、 $AC=x$ と置くことで、線分 DF の長さを x を用いて $DF=x-1$ と表すことができる。

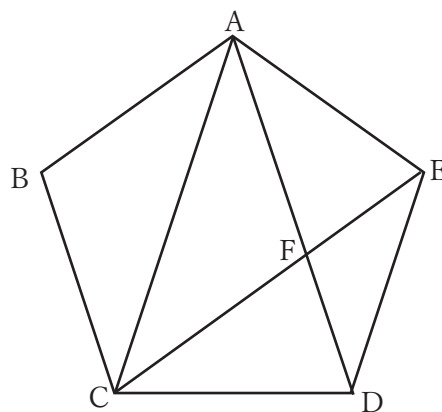
相似な三角形の性質から

$$AC : CD = CD : DF$$

$$x : 1 = 1 : (x - 1)$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad x > 0 \quad \text{より} \quad x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$



【図 1】

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解の公式 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$ を紹介した。

ここで求めた比 $1 : \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ($= \frac{\sqrt{5} - 1}{2} : 1$) を黄金比という。

黄金比・黄金三角形については様々な美しい性質があるが、ここでは、底角の二等分線を引き、相似な黄金三角形を次々と無限に作っていくことができることを紹介。

②正五角形の作図【パート 1】

これまでの準備や、正五角形の分析から、正五角形の作図をする準備が整った。

線分 CD の長さを与え、正五角形 $ABCDE$ を作図することに取り組む。

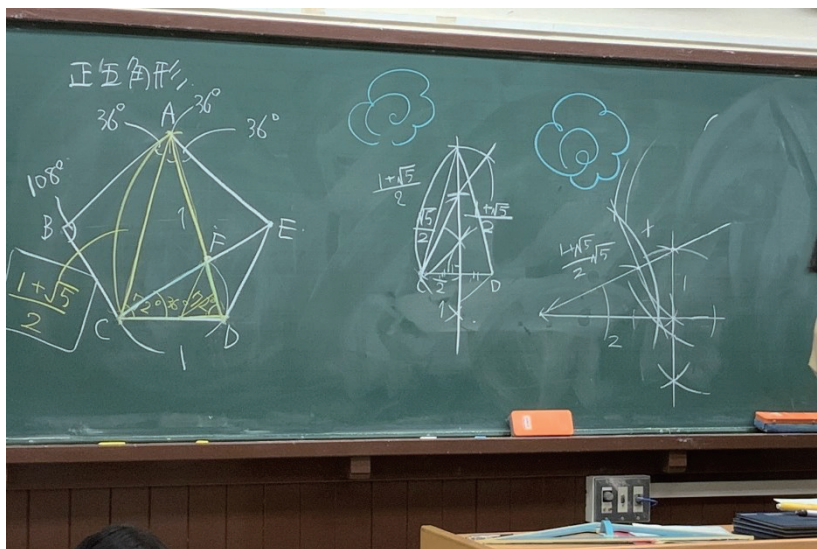
まずは、どうやったらコンパスと定規で作図できるか、生徒に自由に考えてもらった。

- ・ $\triangle ACD$ が作図できれば、点 B 、点 E はすぐに作図できること。
- ・ $\triangle ACD$ を作図する、ということは、

$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ の長さを作図すればよい。(1 の長さを別のところに移して作図してもよい)

という 2 点を確認し、各グループの様子に応じて、 $\sqrt{5}$ の長さの作り方など

を確認していったところ、写真にあるような 2 つの解法が出てきたので、黒板で発表してもらった。一つの解法で解けた生徒も、もっと手順がシンプルになるような方法を考えるよう促した。



③円に内接する正五角形の作図

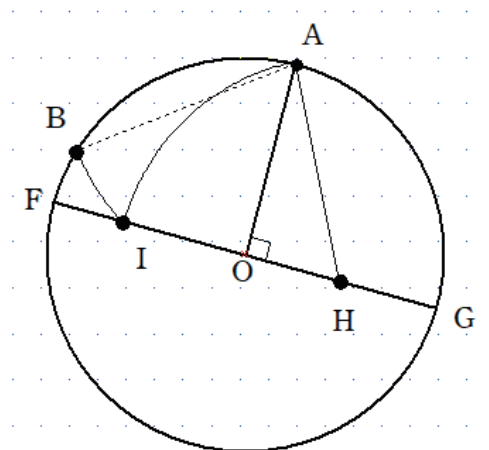
まずは、プリントにある下記の方法を読み、生徒が自力で作図していく。教員が、確認しながら黒板で作図していった。

正五角形の作図【パート2】

～円に内接する正五角形の作図～

円に内接する正五角形は下のように作図できる。

- ① 中心が O 、半径 1 である円の円周上に点 A をとる。半径 OA に垂直な直径 FG をかき、半径 OG の中点 H をとる。
- ② 点 H を中心として、半径 AH とする円をかき、直径 FG との交点を I とする。
- ③ 点 A を中心として、半径 AI とする円をかき、円 O との交点を B とする。線分 AB が正五角形の一辺になる。



【図 2】

上のやり方で作図が完成した後で、この作図が本当に正確な正五角形の作図になっているのかを検証する必要があることを示唆し、円の半径を 1 としたとの辺 AB の長さを求めることとした。

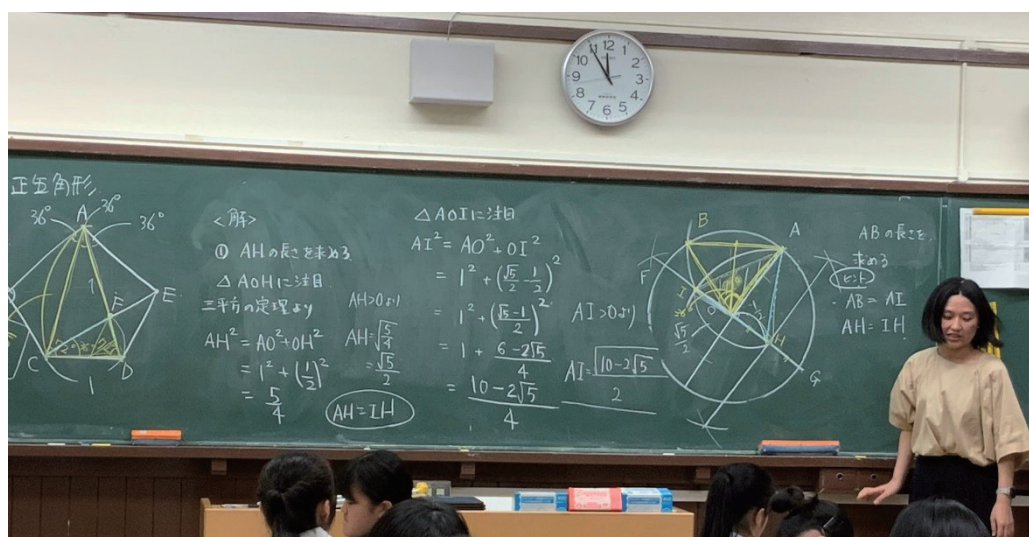
手順 i AH の長さを $\triangle AOH$ に三平方の定理を用いて求める。

ii $AH=IH$ より IO の長さを求める。

iii AI の長さを $\triangle AOI$ に三平方の定理を用いて求める。

iv $AI=AB$ より $AB = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$

ここまでで時間がとってしまった。あとは、半径 1 の円に内接する正五角形の一辺の長さを求めてこの値と一致するのかを検証する必要があるということを確認した。一辺の長さは、前半で扱った黄金三角形を利用することで求めることができる。「パート 2」は基本、教員が説明をしながら、計算部分は少し時間をとり一緒に進めていく形で行った。 AB の長さが求まったとき、初めてみたであろう二重根号に少し驚きつつ、まだ検証が終わっていないという説明にも、納得しているような表情が印象に残っている。家に帰った後挑戦してくれていたらうれしい。



④ パート2の作図方法が正しいことの検証

(当初、体験授業の中でやる予定だったが、実際にはできなかった内容を追記しておく)

【図1】の△ACDを用いて検証する。(【図3】参照)

AC=1 とすると、 $AC:CD=1:\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ となることは求めてあった。

点Cから辺ADに垂線CGをおろす。このとき、

$AG=AF+FG=AF+\frac{1}{2}DF=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ であるから

∠CAG=36° である直角三角形ACGにおいて、三平方の定理より

$$CG^2 = AC^2 - AG^2 = 1^2 - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2 = \frac{10-2\sqrt{5}}{16}$$

したがって $CG=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

ここで、パート2の作図を思い出してみる。円の半径を1とし

たとき、正五角形の1辺の長さABが $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$ であることは授業

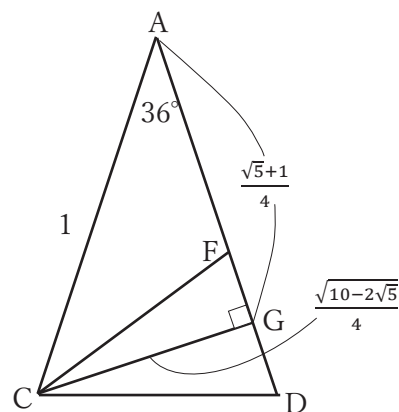
の中で示してあった。これは、【図2】の二等辺三角形OABの頂点Oから辺ABにおろした垂線の足をJとすれば、

$$AJ = \frac{1}{2}AB = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

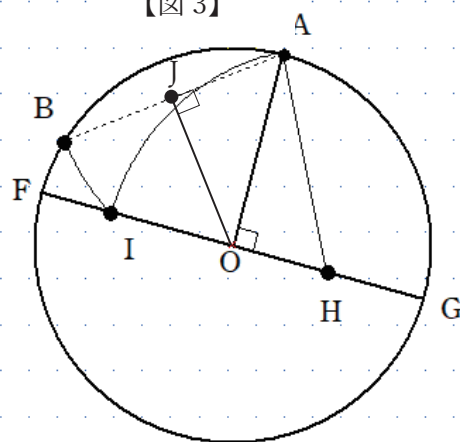
であることと同値である。このことは、直角三角形OAJにおいて

∠AOJ=36° である、∠AOB=72° となるから、パート2の作図は、

円Oの中心を5等分していることがわかった。したがって、パート2の正五角形の作図方法は正しいことが証明された。



【図3】



【図4】

3. おわりに

授業後のアンケートで、授業の難易度について「ちょうどよかった」が7人、「やや易しかった」と回答した2人は中学3年生。「やや難しかった」と回答したのは9名、「難しかった」と回答した2名は、2年生、3年生ひとりずつであった。久しぶりに中学2年生も受け入れる形式で実施し、既習と未習の違いをどう埋めるのかが、1つのポイントとなった。公式などは、3年生に声をだしてもらいそれを板書し使っていく方法をとった。グループワークや教員2名の体制も機能し、終始よい雰囲気であったと感じる。

以下は、受講生の感想の抜粋である。

「グループで考え教え合うことでより授業に近い環境で体験できた。来てよかったです。」

「みんなの解き方も聞けて考え方が広がりました。」「難しかったけど、すごく楽しかったです。またやりたいです。」「とても楽しくて作図をたくさんしたいと思いました。」「興味のあった図形分野でとても楽しかったです。」「わかりやすい説明で図形が苦手な私も楽しめました。」「習ったことがある単元でも知らないことがあって勉強になりました。」「本質的な部分を迫っていく授業をしてきて楽しかった!!!」