

数学①コース：「証明」について考えよう

数学科 三 橋 一 行

数学①コース：『「証明」について考えよう。』（定員 24 名）

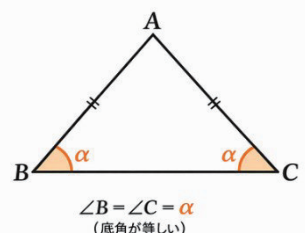
「二等辺三角形の 2 つの底角は等しい」の証明は中学校の教科書にありますね。その証明はよく読んでみるとおかしい点があります。お気づきでしょうか？その分析と正しい方法を、ユークリッド原論を参考に探してみましょ。そして論理的に物事を証明する面白さを学んでいきましょう。コンパスと定規を用意してご参加下さい。

上にあげたように 2025 年度理数一日体験授業の数学①のタイトルは『「証明」について考えよう。』であった。より具体的には、「二等辺三角形の底角は等しい」の証明をめぐる循環論法に着目させる授業実践といえる。論証の妥当性を問うという中学校数学の発展形の授業にあたるだろう。毎年、理数一日体験授業の内容には迷う。とくに、高校の内容を中学生にわかりやすく紹介するのか、それとも中学校の内容を高校教師がその視点から中学生に指導するものなのかどちらにするのか迷うのである。最近では、あまり背伸びをするのは良くないと私は考える。日頃接している中学校数学の中にも良く考えると不思議に思う点があったり、ちょっと踏み込んで考えてみると新しい世界が開けたりする。その方が問題を見つける能力も鍛えられるのではないだろうか。今回は、中学校 2 年生の図形分野では基本的なこと。それどころかこの性質自体は小学生でも知っている内容である。しかし、証明となると中学校の教科書では一見簡単に行っているが、よく考えてみるとおかしいことに気づく。教育的にはわかりやすく簡単で良いと思うのであるが、学問的にユークリッド原論に立ち返ってみると意外なことに、非常に苦労して証明している。あくまでも論理的に話を進めているからである。ということは教科書の内容にはどこか論理的に破綻しているはずである。原因は作図に頼っているところにある。作図の方法自体も幾何学の定理にもとづくものである。しかし、中学校の教科書では難しさを避けるために作図は事実として受け入れる傾向にある。その点に帰着させて、論理の穴を指摘し、循環論法になっていることに気づいてもら。そして、正しい証明を考えるようにする流れの授業を考えてみた。

1. はじめに（研究の背景・問題意識）

中学校数学の「図形の性質」において、多くの教科書では「二等辺三角形の底角は等しい」ことを証明するために、「頂角の二等分線」を補助線として引く手法をとる。もしくは、底辺の midpoint と頂角を結ぶ補助線を引く手法をとる。しかし、これらの証明が前提としている「三角形の合同条件」や「作図の可能性」が、知らずのうちに結論（底角が等しいこと）を先取りしていないか、あるいは他の定理と矛盾していないかを批判的に検討させる。

数学的な正しさ（真理）が、単なる暗記ではなく、無矛盾な論理の積み上げ（公理系）によって支えられていることを実感させる。

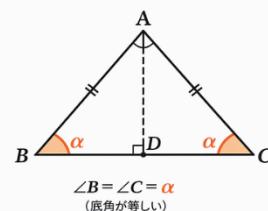


2. 本時の展開と指導上の留意点

(1) 既習の証明の再確認

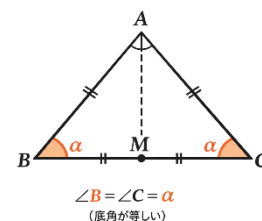
教科書に掲載されている一般的な証明手順を振り返る。

- ・ 定義： 2つの辺が等しい三角形を二等辺三角形とする。
- ・ 補助線： 頂角の二等分線を引く。
- ・ 証明： 2辺とその間の角がそれぞれ等しい（三角形の合同条件）。したがって 対応する角は等しい（底角が等しい）。



もしくは、

- ・ 補助線： 底辺の中点を取る。その中点と頂角を結ぶ。
- ・ 証明： 3辺がそれぞれ等しい（三角形の合同条件）。したがって 対応する角は等しい（底角が等しい）。



(2) 循環論法の指摘（授業の核心）

ここで、以下の問いを投げかけ、論理の「環（わ）」を意識させる。

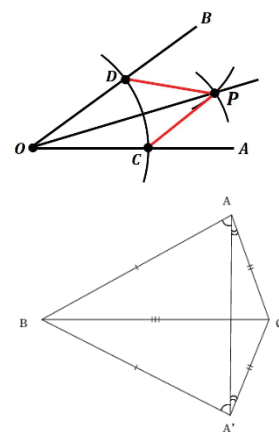
「角の二等分線は、定規とコンパスでどうやって作図するか？」

この作図の根拠となる三角形の合同条件が「3辺がそれぞれ等しい」である。

続いて、さらに問を投げかける。

「では、3辺がそれぞれ等しい三角形は合同といえるのはなぜか？」

ところが、この「3辺がそれぞれ等しい」という合同条件は「二等辺三角形の底角が等しい」を用いて証明されるものである。①での証明に用いる補助線はどちらであっても、結局この「3辺がそれぞれ等しい」という合同条件を用いることになる。これは循環論法（circular reasoning）となる。



二等辺三角形の底角は等しい

↓ 根拠

角の二等分線（垂直二等分線）の作図

↓ 根拠

三角形の合同条件「3つの辺がそれぞれ等しい」

↓ 根拠

二等辺三角形の底角は等しい

循環論法 発生！！

(3) 厳密な証明へのアプローチ

循環論法を回避するための代替案を提示する。

① ユークリッド原論に従って、それぞれの等辺を下方に、ともに同じだけ伸ばして、二辺夾角相等の合同条件で三角形合同から底角が等しいことを証明する。

② パップスの証明： 補助線を引かず、 $\triangle ABC$ とその裏返ししの $\triangle ACB$ を比較する手法をとる。しかし、これは、図形を裏返すという反則的な技である。そもそも、図形を裏返しても問題ないことを証明せねばならないだろう。

3. 生徒の反応と考察

受講生徒からは、次のような感想を得た。主なものを抜粋してあげておく。

- ・ユークリッド幾何には興味があったけど学べる機会が少なかったので学べてよかった。
- ・教科書を疑うということを初めてして証明はもともと苦手だったけど、少し自分の中のハードルが下がりました。楽しかったです。
- ・二等辺三角形の底角を証明するのに、循環してしまうとわかって、循環しないやり方を見つけようと思えることがとても楽しかった
- ・学校などでは習わないような内容で、すごく興味が湧きました。普段何気なくやっている数学の証明や疑ったことのない教科書の内容を掘り下げるとこんなに面白いことになるんだなと思いました。今日習った考え方や概念を受験勉強に活かしていきたいです。
- ・とても楽しかったです。証明問題は苦手なので初めのほうはあまり分からなくて、周りの子の解説を聞いて、なるほどと思っていたのですが、どんどん終盤に入っていくにつれて、初めに解いた問題は後に生きてきてすなりと理解できました。だから面白いと感じられたのだと思います。スライドのユークリッド原論の話も興味深かったです。証明の楽しさが少し分かったような気がします。

以上のような感想が見られた。ほぼ、授業も目的は達せられたと思う。特に、数学を「決まった手順の再現」と考えていた層にとって、「何を前提としてよいのか」を疑うプロセスは、論理的思考の重要性を再認識させる機会となったのではないかと思う。また、角の二等分線の「存在」を公理的に認めるか、あるいは「構成（作図）」できることを証明するかという、数学基礎論に近い視点に興味を持つ生徒も散見された。

4. 今後の課題

「分かりやすさ」のために論理的な厳密さを一部省略している教科書の教育的配慮と、数学的厳密さのジレンマをどう扱うか。今後は、他の単元（平行線の錯角と第五公準など）においても、同様の批判的思考を促す場面を設定したい。

この原案をベースに、実際の生徒の具体的な中学校数学において「二等辺三角形の底角は等しい」という命題は、図形分野における最も基本的な定理の一つとして位置づけられている。教科書では、合同な三角形を用いた証明や、補助線を引くことによる証明などが提示され、生徒はそれを模倣的に理解・記述することが多い。しかし、その過程において、証明の前提として用いている事実と、結論として示したい事実とが区別されないまま受け取られていることが少なくない。とくに、「底角が等しいから二等辺三角形である」「二等辺三角形だから底角が等しい」といった日常的な理解が先行すると、教科書に示された証明が循環論法に陥っているように見える、あるいは実際に循環的に理解されてしまうという問題が生じる。論理的に考えることはあらゆる学問分野に必要なだけでなく日常生活においても非常に大事なことであることは言うまでもない。そして数学の学習においても大きく影響を及ぼしている。難しいからといって先送りにすることなく、学習内容が簡単なうちに論理的思考を養っていく必要があると思う。問題集にある問題や受験問題に限らず論理に関する問題にももっと取り組めるようにすること、そして時には前提を疑ってきちんと考えて見る姿勢を作っていくことが大切なのだと考える。そのような課題や授業の開発にこれからも尽力していきたい。

参考文献

中学校教科書 「中学校数学 1, 2」 学校図書
ユークリッド原論 中村幸四郎 他 3 名 共立出版