## 高等学校２年生：データの分析の応用（数学Ⅱにて実施）

# 最小二乗法による回帰直線の導出

附属高等学校　阿部　真由美

### １．学習のねらい

① 「散布図」という図形的な情報を「関数」で表現するという回帰直線の意義そのもの，また，その傾きや通る点の意味について興味を持つ。

② 直線の方程式を求める方法を理解する。

③ 直線の式を導出する過程を体験することを通じて，既習の数学（２次関数の最小値，微分）や発展的な内容（2 変数関数の扱い）についても理解を深め，数学の有用性について再認識する。

### ２．教材について

数学Ⅰ「データの分析」において散布図を学ぶことになっているが，教科書の発展事項には，x, y のデータの平均 $\overline{x}$, $\overline{y}$ に対応する点 $(\overline{x},\ \overline{y})$ を通りかつデータとの誤差が小さくなるような直線が最小二乗法を用いて求められることが記載されている。生徒は，表計算ソフトなどで散布図を表示させると，同時に直線（回帰直線）が現れること，また，それらのデータに正の相関があれば，直線の傾きが正になることも体験的に知っているが，どのようにしてその直線の式が求められるのか，どのような数式で表されるのかまでは厳密には扱っていない。はじめは，「データの分析」，および「２次関数」を学び終えた高校 1 年生に向けて回帰直線の導出の授業を行おうと考えていたが，構想を練る中で，1 年生では，複雑な式の変形に注意が行ってしまい，導出過程で得られる数学的な面白さ・美しさを実感させるのが難しいと判断し，2 年生で実施するに至った。

2 年生では，数学Ⅱを学習する中で 2 次関数の扱いにも慣れ，さらに，数列や統計的な推測，微分法と積分法を学び終えており，与えられた式を目標に合わせて変形する基礎的な力は身についている。題材は統計分野であるが，既習事項を総動員した「数学的探究の集大成」として位置付ける発展的な題材としても有用であると考えた。

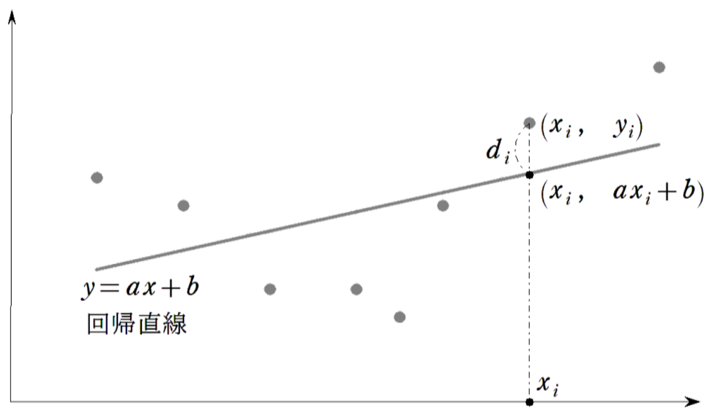
### ３．育てたい力（資質・能力）

- ■ これまで学んできた数学的な見方，考え方を問題解決に活用する力。
- ■ 知識・技能を活用して，与えられた問題を数学的に解決しようとする意欲。

### ４．学習の展開

① 学習指導案（1 コマ　45 分）

| 学習活動 | 指導の手立て留意点 |
| --- | --- |
| $\boxed{1}$.**「回帰直線」の意味を確認する。**<br>$\boxed{問}$Excelなどで散布図を描いたときに，直線が現れる。「回帰直線」と言われるものである。この直線は何を表しているのか。<br>$\boxed{問}$直線の式はどのようにしたら求められるのか。<br>n個のデータ $(x_1\ ,\ y_1)$，$(x_2\ ,\ y_2)$，$\cdots(x_n\ ,\ y_n)$に対して<br>仮に直線の式を $y=ax+b$ として考えてみよう。 | ・「回帰直線」を知らない生徒もいるので，その意味（散布図の点の配列を直線で近似している）について全体で確認する。<br>・n 組のデータを与え，数式を使って考えることを確認する。 |

<table>
<tr>
<td>


</td>
<td>・n個の点$(x_i\ ,\ y_i)$と直線との距離の和が最も小さくなれば良いことを確認する。直線に垂線を下ろすのではなく，y座標の差で考えることも確認しておく。</td>
</tr>
<tr>
<td>

**2. 回帰直線の式を求めるための目標の確認**

y 軸方向の誤差（残差）$d_i$を表してみると

$$d_i=|y_i-(ax_i+b)|$$

$d_i$の和を取ると，絶対値の和を求めることになり複雑。<br>
2乗の和を求める方法をとることにする。すなわち

目標　$S=\sum_{i=1}^{n} d_i^{\,2}$ が最小になるような　$a$ と $b$ の値を求めればよい。
</td>
<td>・目標をはっきりさせる。Sが最小になるように，a,bの値を求めることが目標となる。<br>・2乗の和を考える，という方法は分散を求める際に利用した考え方で，既習事項とつながる場面</td>
</tr>
<tr>
<td>

**3. まずはSをbの関数とみて，Sが最小となるbの値を求める**

$d_i$ を代入し，Sの式を展開してみる。

$$S=\sum_{i=1}^{n}\{y_i-(ax_i+b)\}^2 \qquad \cdots①\ \text{とする。}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\{(y_i-ax_i)-b\}^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\{(y_i-ax_i)^2-2b(y_i-ax_i)+b^2\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}b^2+\sum_{i=1}^{n}2b(y_i-ax_i)+\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i)^2$$

$$=nb^2+2b\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i)+\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i)^2$$

bの2次関数になったことを確認する。

問 2次関数の最小値はどのように求めたらよいか。<br>
（生徒）平方完成すればよい<br>
（$b^2$の係数が正であるからグラフは下に凸。図をかいて確認する）<br>
問 2次関数の最小値は，極小値でもある。平方完成以外に，何か良い方法はないか。<br>
（生徒）微分すればよい。

bで微分し，極値を取るbの値を求めていく。
</td>
<td>・目標に照らすと，Sの式の中で$x_i$ ，$y_i$を定数，a,bを変数とみることになる。つまり2変数関数となるが，係数が簡単な方の文字 b について整理することを方向付ける。<br><br>・2次関数の最小値を求めるために平方完成という方法をとってきたが，微分法の知識から【放物線の頂点＝2次関数の極値】であるから，微分して導関数が0になるbを求めることも有効な手段であることを全体で共有する。<br>（平方完成で求めても構わない）</td>
</tr>
</table>

$$\frac{dS}{db}=2nb-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i)$$

$$\frac{dS}{db}=0 \quad より \quad b=\frac{2\Sigma_{i=1}^{n}(y_i-ax_i)}{2n}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i-a\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$=\overline{y}-a\overline{x}$$

よって，直線の式は次の式で表され，②のように変形できる

$\boxed{\text{直線の式}}$

$$y=ax+(\overline{y}-a\overline{x})$$

$$\Leftrightarrow \quad y-\overline{y}=a(x-\overline{x}) \qquad \cdots② とする。$$

$\boxed{\text{問}}$　②式から，直線が通る定点の座標は何か。

（生徒）点　$(\overline{x},\ \overline{y})$　を通っている。

・b が求まった（b をa の式で表すことができた）。

・直線の式の中にx, yのデータの平均　$\overline{x},\ \overline{y}$　の値が現れ，回帰直線が<u>点　$(\overline{x},\ \overline{y})$　を通る直線になっている</u>ことに注目させる。

**$\boxed{4}$．次にSをaの関数とみて，Sが最小となるaの値を求める**

bの値を①式に代入し，展開してaについて整理する。

$$S=\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-\{ax_i+(\overline{y}-a\overline{x})\}\right]^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\{y_i-\overline{y}-a(x_i-\overline{x})\}^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\{a^2(x_i-\overline{x})^2-2a(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})+(y_i-\overline{y})^2\}$$

$$=a^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2+2a\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})+\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2$$

aの2次関数であるから, aで微分して最小値を与えるaを求めると

$$\frac{dS}{da}=2a\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2+2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$$

$$\frac{dS}{da}=0 \quad より \quad a=\frac{\Sigma_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\Sigma_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$$

分母分子を $n$ で割ると

$$a=\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$$

$$=\frac{S_{xy}}{S_x{}^2}$$

まとめると，

$\boxed{\text{回帰直線の式}}$

$$y=ax+b \quad ただし，\ a=\frac{S_{xy}}{S_x{}^2}\ ,\quad b=\overline{y}-a\overline{x}$$

$\boxed{\text{問}}$　回帰直線の傾きと相関係数の符号にはどのような関係があるか。また，それはなぜか。

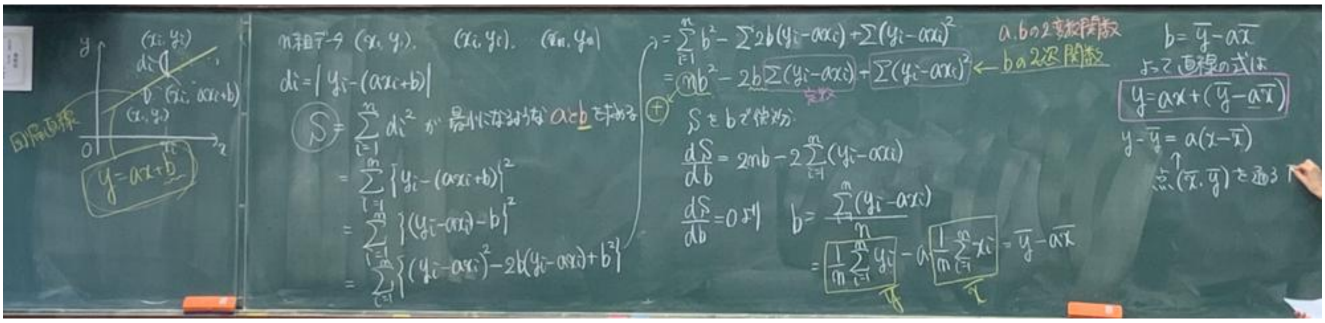
・aを求める操作は，$\boxed{3}$．と同様な流れになる。

・aの値は求められたが，さらに変形して<u>共分散とxの分散を用いて表す</u>。

・分散や標準偏差は正の値をとるので，それぞれの符号は共分散の符号と同じ符号になる。

| | |
|---|---|
| （生徒）共分散の符号と同じになるから，符号は一致する。<br>相関係数ｒは $r=\dfrac{S_{xy}}{S_xS_y}$<br>$\boxed{\text{問（おまけ）}}$ 回帰直線を相関係数ｒを用いて表すとどうなるか。<br>直線を②の形で表し、さらに、$r$ と $S_x$，$S_y$ を用いて書き換えると<br>$\dfrac{y-\overline{y}}{S_y}=r\cdot\dfrac{x-\overline{x}}{S_x}$ | ・（偏差）/（標準偏差）の式が現れ，その比が相関係数ｒとなっている。 |
| $\boxed{5}$．**まとめ**<br>回帰直線の式は，<br>傾きは，共分散をｘの分散で割ったもの，<br>ｙ切片は，ｘ，ｙの平均を通るようにしたもの<br>である。 | |

### ②　授業活動の実際



・「回帰直線」の名称は知らない生徒が多かったが，散布図に現れる直線の存在やその特徴（分布を近似する直線）は，ほとんどの生徒が知っていた。2 乗の和に着目する，というアイデアは生徒の方から発言があり，生徒主体の流れを作ることができた。

・$\boxed{2}$．において，Ｓが a, b の関数であること，さらにｂの関数とみて式を整理することは，授業者主導で流れを作ったが，時間が許せば、生徒からアイデアを募る方がより望ましいだろう。

・$\boxed{3}$．においてｂの２次関数Ｓの最小値を求める方法として，まず生徒から「平方完成すればよい」いう意見が出たが，２次関数のグラフを書き，「極小値」という言葉を授業者が伝えたところ，すぐに生徒から「微分すればよい」という意見がでた。「微分法と積分法」を学んだ直後という影響も大きい。

・回帰直線が平均の点を通ることや，傾きａが分散や共分散で表されることに，生徒は素直に感動していた。

・平方完成という方針だけは確認し，実際の計算は，微分法を用いた簡便な方法を取ったことで，複雑な計算を多少は回避でき，生徒も微分法の有用性を実感していた。一方で，Σや添え字が多く含まれている式の複雑さゆえに，計算についてこられなかった生徒も少なくなかったようだ。

## ５．授業を振り返って

１コマ（４５分）の授業内に収めることを目標としたため，全体の流れは授業者主導で進めたが，目

標設定や式の解釈など、数学的な見方・考え方が必要となる場面では、生徒に考えさせる進めることができた。そのせいか，計算がメインかつ式が煩雑ではあったが，多くの生徒は、目標を見失わずに主体的に取り組むことができた。

最後におまけとして直線の式を相関係数ｒを用いて表したが，$a=r\cdot\frac{S_y}{S_x}$ と表せることから，$S_x$，$S_y$，ｒの値の変化に伴い傾きａがどのように変化するかを考えさせてもよいかもしれない。
生徒が自力で導出するには煩雑であるが、Σ計算の復習をしながら，計算過程で統計量を表す式が出現し，数学の美しさを感じられる教材であったと改めて感じた。

**【参考文献】**


・数学Ⅰ，数研出版　2022，p200

・最小二乗法と回帰直線/受験の月

https://examist.jp/mathematics/data/kaikityokusen/#google_vignette　（参照 2026-2-26）

・高校数学の美しい物語　最小二乗法（直線）の簡単な説明

https://manabitimes.jp/math/942　（参照 2026-2-26）