

数学②コース：いろいろな数の和を考えよう

数学科 阿部 真由美 十九浦 美里

1. はじめに

今回は「数列とその和」をテーマとして、パスカルの三角形の中に現れる数の列からスタートし、数列の和の求め方や無限級数も扱った。高校2年生にアシスタントを募集したところ、5名が申し出てくれた。教員があらかじめいくつかのトピックを提示したところ、5名の中には2年前に体験授業に参加した生徒もあり、昨年同様、生徒が主体となって授業を進めることとした。テーマごとに分担し、各自で準備をすすめ、夏休み中に何度か集まって授業構成やスライド・ワークシートに載せる内容などのすり合わせを行った。何度かリハーサルをすることで、教師役の高校生たちの間でも、今回の体験授業の中で伝えるポイントがはっきりと見えてきたようである。定義や用語の確認を中学生に対してどこまで行うか、どのような順番で説明したら中学生にとってわかりやすいかなど、教員と一緒に相談しながら考えた。当日の授業の内容を以下に示す。

2. 授業の内容

① パスカルの三角形と数列

パスカルの三角形の作り方を説明し、プリントの三角形を6段目まで完成させ、数の並びに法則がないか、3～4名のグループになって考えてもらった。

- ・自然数の列 1, 2, 3, 4, ……
- ・横一列に現れる数をすべて足すと2のべき乗になる
 $1+1=2$, $1+2+1=4$, $1+3+3+1=8$, ……

- ・三角数 1, 3, 6, 10, ……
(差が+2, +3, +4…)

などは、中学生が見つけて発表した。

「三角数」という用語は教師役の高校生が紹介しつつ、三角形状にボールを並べていくときに必要なボールの数であることも図で示した。その他に、

- ・四面体数 1, 4, 10, 20, ……
- ・フィボナッチ数列 1, 1, 2, 3, 5, 8, ……

についても紹介した。四面体数は、グループごとに、実際に四面体数の数のボールを用いて四面体をつくる作業をおこなった。

フィボナッチ数についても、植物の葉や種の数などの自然界に、また黄金比との関係や、黄金比が絵画にも使われていることなども紹介した。

		1		1												
	1		2		1											
	1		3		3		1									
		1		4		6		4		1						
			1		5		10		10		5		1			
				1		6		15		20		15		6		1

【図1】パスカルの三角形



【図2】四面体数

② パスカルの三角形と乗法公式

中学生に、 $(a+b)^2$, $(a+b)^3$ を展開してもらい、パスカルの三角形と照らし合わせる。 $(a+b)^n$ を展開

開し、 a について降べきの順に並べたときの係数が、パスカルの三角形の n 段に現れる数の列と同じになっている。したがって、4 段目を例にとり、 $(a+b)^4$ の展開式が簡単に求められることを紹介した。

ここで、3 段目に着目し、「なぜ $(a+b)^3$ の展開式の係数がパスカルの三角形の 3 段目に現れるのか」ということを、分配法則と同類項の係数を用いて、下のような式や図を用いて説明した。

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 \\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2) \\ &= a^3+2a^2b+ab^2 \\ &\quad +a^2b+2ab^2+b^3 \\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

	1	2	1	
+		1	2	1
	1	3	3	1

「2 乗の展開式の係数を下の行に横に 1 つずらして書き、縦に足す」ということは、パスカルの三角形の「2 段目の隣り合う数を足して 3 段目段を作る」という作業と同じである。

さらに、組合せ（コンビネーション）の記号 C を紹介した。

$${}_nC_r \quad n \text{ コから } r \text{ コとる組合せの総数}$$

この組合せの考え方と記号 C を用いて、 $(a+b)^3$ の展開式の各項の係数について考察する。

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)(a+b) \\ &= aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb \\ &= 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3\end{aligned}$$

←各項は 3 つの () から 1 つずつ
文字を取り出した組合せ

例えば、文字 b に着目すれば $3a^2b$ という項の係数 3 は、「3 つの () から a を 2 つ、 b を 1 つとる組み合わせの総数」であるから、

$$(a+b)^3 = {}_3C_0 a^3 + {}_3C_1 a^2b + {}_3C_2 ab^2 + {}_3C_3 b^3$$

と記述することができる。 ${}_3C_0$ は、 b に着目すると「 b を 0 個取る組み合わせ」となるが、これは「 a を 3 つ取る組み合わせの総数」であるからその値は 1 である。このことから、パスカルの三角形を上から順に全部書かなくても、 n 段目は

$${}_nC_0 \quad {}nC_1 \quad {}nC_2 \quad \cdots \quad {}nC_n$$

を計算すればよい。

「横一列に現れる数をすべて足すと 2 のべき乗になる」という性質について、パスカルの三角形の n 段目が、 $(a+b)^n$ の展開式に対応していることから、例えば

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ \text{において } a &= 1, b = 1 \text{ を代入すると} \\ (1+1)^2 &= 1 + 2 + 1 \\ 2^2 &= 4\end{aligned}$$

が成り立つことがわかる。

③ いろいろな数の和を考えてみよう

まず、次の(1)を例題として扱い、和 S の求め方を考えてもらった。

$$(1) \quad S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + 100$$

ヒント：1 番初めの数と 1 番最後の数、2 番目の数と最後から 2 番目の数…を足してみよう

$$\begin{array}{r}
 1+2+3+4+5+6 \\
 + \quad 6+5+4+3+2+1 \\
 \hline
 7+7+7+7+7+7
 \end{array}$$

このヒントを受けて、参加者の中学生が黒板で、以下のように発表してくれた。

$$\begin{array}{r}
 S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + 100 \\
 + \quad S = 100 + 99 + 98 + \cdots + 1 \\
 \hline
 2S = 101 + 101 + 101 + \cdots + 101 \qquad S = 101 \times 100 \times \frac{1}{2} = 5050
 \end{array}$$

差が1の等差数列であることから、後ろの項から足した式を用いることで、簡単に和を求められる。

さらに、同じ考え方を応用して、次の3つの問題に取り組んでもらった。

(2) $S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n$

(3) $S = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \cdots + 2n$

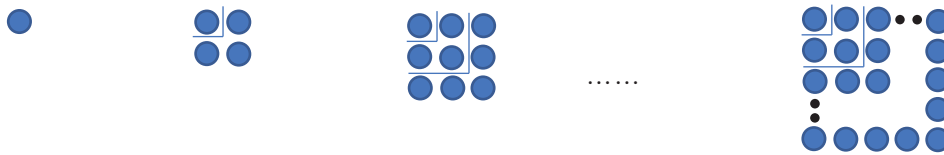
(4) $S = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + (2n - 1)$

解答は次のようになる。

(2)は(1)において100を n に変えて $\frac{1}{2}n(n+1)$

(3)は(2)を2倍したものなので $n(n+1)$

(4)は図で考える。下ののように石を並べていくと



$$1 = 1 \times 1, \quad 1 + 3 = 2 \times 2, \quad 1 + 3 + 5 = 3 \times 3, \quad \cdots \quad 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n \times n$$

と説明できる。

④ 数列の一般項を求めよう

数列の基礎知識として、「数列」という用語の定義を行い、問題(2)～(4)の数列に自然数列、偶数列、三角数列、という名前がついていることを紹介した。

ここでは、一般項を求める課題に取り組むため、初項、第2項、…第 n 項 といった用語、第 n 項を a_n と表し、これを一般項と呼ぶことも紹介したうえで課題に取り組んだ。

例題 ・自然数列 1, 2, 3, 4, $\cdots$, n の一般項

→第1項 $a_1 = 1$, 第2項 $a_2 = 2$, $\cdots$ と並ぶから、一般項 $a_n = n$

・偶数列 2, 4, 6, 8, $\cdots$, $2n$ の一般項

→第1項 $a_1 = 2$, 第2項 $a_2 = 4$, $\cdots$ と並び自然数列の2倍になっているから、一般項 $a_n = 2n$

③の(3)の問題 $S = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \cdots + 2n$ において、 $2 \times 1 + 2 \times 2 + \cdots + 2 \times n$ と表せるので項数は n であることに言及し、以下の一般項を求める問題にとりくんだ。

(1) 奇数列 1, 3, 5, 7, 9, $\cdots$

(2) 1, 4, 9, 16, 25, $\cdots$

(3) 1, 3, 9, 27, 81, $\cdots$

(4) 三角数列 1, 3, 6, 10, 15, $\cdots$

参加者に考えてもらっている途中で、(3)のヒントとして、 $3^0 = 1$ であること、(4)のヒントとして以下のような考え方を提示した。

第1項 $a_1 = 1$

第2項 $a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3$

第3項 $a_3 = a_2 + 3 = 1 + 2 + 3 = 6$

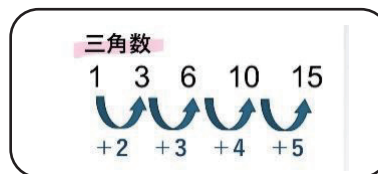
……と書ける。第 n 項はどうなるか。

解答は次のようになる。

(1) $2n - 1$ (2) n^2 (3) 3^{n-1}

(4) 第 n 項 $a_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$

(4)については難易度が高いであろうと教師役の高校生があらかじめヒントを用意しておいたこともあり、多くの中学生が答えを出すことが出来ており、発表もしてくれた。



⑤ 総和記号「 Σ 」

数列 $\{a_n\}$ の第1項から第 n 項までの和（総和）を記号「 Σ （シグマ）」を用いて

$$\sum_{k=1}^n a_k$$

と表すことを紹介し、その式の使い方を説明した。この記号に慣れるため、次の問題に取り組んだ。

(1)は Σ を使わない形で、(2)(3)は Σ を使って書き換えてみよう。

(1) $\sum_{k=1}^n k$

(2) $3 + 5 + 7 + \cdots + (2n + 1)$

(3) 自然数列 $1, 2, 3, \cdots$ の第3項から第100項までの総和

少し考える時間をとり、答え合わせをした。

(1) $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n$

(2) $3 + 5 + 7 + \cdots + (2n + 1) = \sum_{k=1}^n (2k + 1)$

(3) $3 + 4 + 5 + \cdots + 100 = \sum_{k=3}^{100} k$

⑥ 数列を無限に足してみよう

一般項が a_n である数列を初項から ∞ まで足した和を

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

と表す。これを無限級数という。

次の数列の和（無限和）は

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n + \cdots = \infty$$

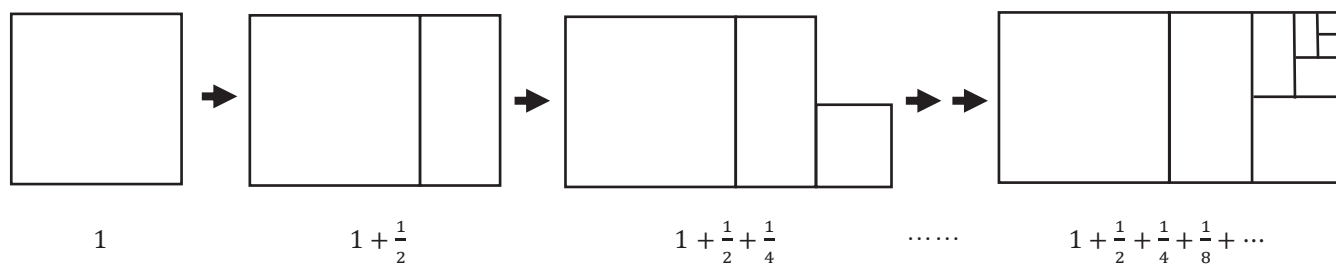
$$-1 - 2 - 3 - 4 - 5 - \cdots - n - \cdots = -\infty$$

となることは、容易にイメージがわく。では、初項1、公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列の和

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

はどうなるか。足す個数は無限であるが、この和は ∞ ではなく2という定数になる。

このことは、面積が1の正方形をもとにして以下のように説明できる。

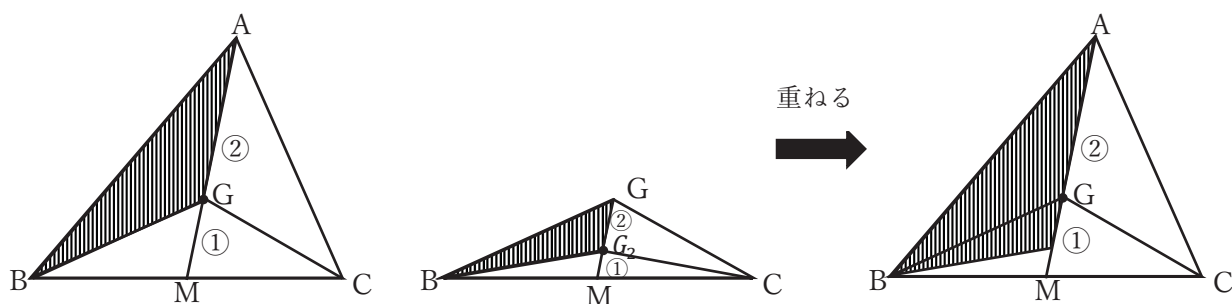


数列なのに図形で考えられるのが面白いところである。

次の無限級数についても図形を用いて考えてみる。

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{3^n} + \cdots$$

三角形の重心の性質と、次のような図を用いる。



面積が1である $\triangle ABC$ を考える。Mを辺BCの中点とし、 $\triangle ABC$ の重心をGとすると $AG : GM = 2 : 1$ であることから、

$$\triangle ABG = \frac{1}{3} \times \triangle ABC = \frac{1}{3}$$

また、

$$\triangle GBC = \frac{1}{3}$$

さらに $\triangle GBC$ について、その重心を G_2 とすると、

$$\triangle GBG_2 = \frac{1}{3} \times \triangle GBC = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}, \quad \triangle G_2BC = \frac{1}{9}$$

同様にして、 $\triangle G_2BC$ の重心を G_3 とし、 $\triangle G_2BG_3 = \triangle G_3BC = \frac{1}{27} \cdots$ とこの操作を続けていくことにより、斜線の部分の面積の和 $\triangle ABG + \triangle GBG_2 + \triangle G_2BG_3 + \cdots + \triangle G_nBG_{n+1} + \cdots$ は n を無限に大きくしていけば、やがて最初の $\triangle ABC$ の半分である $\triangle ABM$ を埋め尽くす。これが面積 $\frac{1}{2}$ に等しいので、

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{3^n} + \cdots = \frac{1}{2}$$

であることがわかる。

3. おわりに

体験授業の準備を高校生と進める中で、「中学の時は、いかに公式をうまく使って問題を解けるかを重視していて、どうやってその公式を導いたか、論理的に説明できるかなどは意識していなかった。公式や性質の証明を中学生と一緒に授業で確認したい」といった意見も出ていた。

当日の体験授業では、参加者の中学生は、教師役の高校生の説明に対し、メモを取りながらよく聞き、出された課題にも積極的に取り組んでいた。数列の記号などは複雑ではあったが、高校生がかみ砕いて説明していたこともあり、多くの参加者が問題に取り組んでいた。

参加者の中学生からは「普段問題を解いていて疑問に思っていたことについて、真から理解できる、良い機会になりました。」「なぜそうなるのかまで詳しく知ることができてとても楽しかったです。」という感想が得られて、狙い通りの授業になったように思う。

教師役の高校生からは次のような感想が得られた。「なんとか臨機応変に授業できて、準備での知識のブラッシュアップも含めて良い経験になりました!」「反応がないと授業が進まないのもとても心配で緊張していたけど、よく反応してくれて、質問もしてくれて近めの距離で交流できて楽しかった。授業を考えるのも楽しくてやりがいがあったし、自分の勉強にもなって良かった。」