

附属高等学校 1 年生：データの分析

「仮説検定の考え方 Ver. 2」

附属高等学校 三橋一行

1. 学習のねらい

- ① 「仮説検定の考え方」をより深く、正しく理解する。
- ② 「仮説検定の考え方」を学ぶ段階で、数学 B で学ぶ「仮説検定」のひな型を作る。
- ③ 既習事項の数学の応用や活用であることを理解する。

2. 教材について

数学 I の「仮説検定の考え方」の学習が数学 B の「仮説検定」の学習に繋がりにくい。数学 B の仮説検定の学習が難しい。これは主に積分、確率を面積で表すなどの未習事項の多さに起因する。そこで、数学 I で扱うような内容で、数学 B の仮説検定の内容に近づけた学習教材が必要であると考えた。相対度数分布表（確率分布）、ヒストグラムを用いて検定を行う。それによって検定の仕組みを知ると同時の理解の難所を数学 I の段階で気づかせ解決行くことを目的として考えた指導案である。授業に使用したスライドの内容を中心に作成された指導案となっている。また、タイトルに「Ver. 2」が付されているのは、「仮説検定の考え方」を、以前、ベイズ統計の考えと比較して背理法的な導入を行う指導案を以前に作成、発表しているためである。今回は、既習事項生かすことに沿った指導となることを心掛けている。

3. 育てたい力（資質・能力）

- 話を聞いて論理的に整理して、理解する力。
- 数学を活用して、現実場面での問題に対して、確率を用いた表現で解決する。

4. 学習の展開

① 学習指導案

学習活動	指導の手立て留意点
本時の流れの説明を聞く。 例題に沿って考え方の説明をする。 ●問題の提示 コインを1回投げる。表が出れば、参加者の勝ち、裏が出れば参加者の負けとする。 このゲームにある8人が1人1回ずつ挑戦した。すると、なんと8人中7人が負けた。つまりコインの裏が7回出たというのだ。 そこで、参加者のAさんが言った。 「8人中7人が負けた。こんなことは、<u>めったに起こらない</u>。 そのコインは<u>公平</u>でなく<u>裏が出やすい</u>に違いない」 果たしてこのコインは公平なのだろうか、裏が出やすいのだろうか。数学的にその理由を述べてみよう。	※ 夏休みの宿題で「仮説検定の考え方」については、各自教科書で勉強し、問題演習はしている。そのことを踏まえて本時の目的を簡単に説明する。

1. 仮説を立てる

- あとで否定されて欲しい仮説 $\leq$ 公平な立場の仮説 $\rightarrow$ 「帰無仮説」と呼び $\rightarrow$ 仮説 H_0 で表す。
- 主張したい仮説 $\rightarrow$ 「対立仮説」と呼び $\rightarrow$ 仮説 H_1
- ★ 仮説を数値で表すとどうなるか。
裏が出る確率を p とすると、
 $H_0 : p =$
 $H_1 : p$

裏が出る確率を p として、仮説がどんな式で表されるかを考える。

$$H_0 : p = 1/2$$

$$H_1 : p > 1/2$$

($p < 1/2$ もあるが、今は現実的でない)
• 観測した事実とそぐわない。

2. 有意水準の設定について説明を受ける。

2. 「めったに起こらない」確率(有意水準)の確認をする。

- このゲームにこの8人が参加して、7人が負けるということはどの程度の起こりやすさなのだろうか？
 - 100回挑戦してに1回程度？
1000回に1回？ 10000回に1回？ 10000...0回に1回？
- もし、5回に1回だとすると、8人が7人負けるのは、あまり珍しいことなので、Aさんの主張は正しくなさそうだ。
では、10000回に1回だとすると、8回中7回裏がでることは奇跡に近い、そんな事が起こったのだろうか？

この議論はむずかしい・・・

- これは、裁判で有罪なのに無罪としてしまったり、無罪なのに有罪としてしまったりするような誤った判断を下してしまうことと同様なのである。

詳しく知りたい人は、「仮説検定」の専門書などを見てください。
超難しいですけど。理解するには高校数学と大学教養数学の勉強頑張ってくださいね♡

現在の統計学では、バランスを考えて 確率0.05以下はめったに起こらないことと見なしている。
(有意水準0.05と言ったりする)

3. 次に、 $p = 1/2$ の立場、帰無仮説 H_0 の元で、

★ 仮説を立てる際に数学的に解決することを目的としているので、仮説は数式で表すことを強調する。

検定手順の考え方を理解するために、帰無仮説、対立仮説の説明し、仮説の性格を知らせる。

● 発問「 p を用いて仮説がどんな式になるかを考えてみよう」 $\rightarrow$ ワークシートに記入させる。

★ $P < 1/2$ をどう扱うかを気にする生徒もいる。

ここは、観測データに沿うものか否かで理解させる。

片側検定か両側検定かの違いが生じる重要ポイントである。

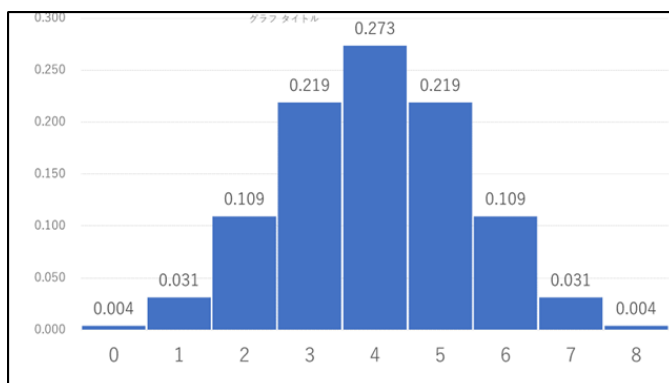
★ 有意水準とは、「どのくらい低い確率であるなら『起こらない』と見なしてよいか」の基準となる確率であることを伝える。。

★ 有意水準の意味は伝えるがその設定については深入りしない。一般に0.05とされていると教える。

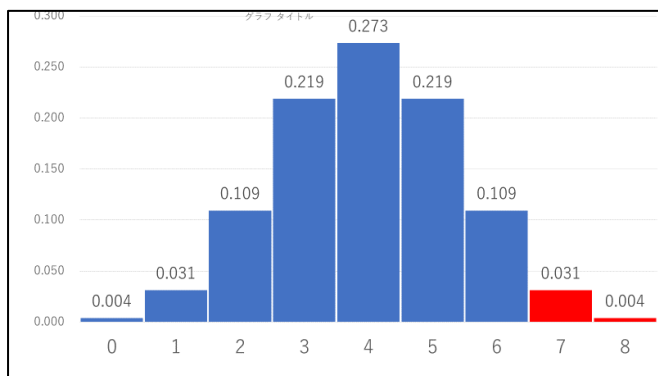
3. 仮説 H_0 のもとで参考となる確率モデル (確率分布)を調べる。 ※シミュレーションの結果もあり

裏が出る回数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	計
	$(1/2)^8$	$8 \times (1/2)^8$	$28 \times (1/2)^8$	$56 \times (1/2)^8$	$70 \times (1/2)^8$	$56 \times (1/2)^8$	$28 \times (1/2)^8$	$8 \times (1/2)^8$	$(1/2)^8$	1
確率	0.0039063	0.03125	0.109375	0.21875	0.2734375	0.21875	0.109375	0.03125	0.00390625	1.000
	0.004	0.031	0.109	0.219	0.273	0.219	0.109	0.031	0.004	1.000

4. ヒストグラムを作る。



ヒストグラムに棄却域を設定させる。



★ 帰無仮説 H_0 の元で、理論的に裏の出る回数とその確率を表にしてみる。

●発問

「裏が出る回数についてその確率を求め表を完成させよう。」

※ これが確率分布である。

※ 現行の教科書では、ここの部分がコイン投げであったり、サイコロ投げであったり別な実験を行った結果をもとにして考えることになる。それは、本来良くないので、同様に確からしいという $1/2$ の確率の立場をとっていることから数学的にしっかり理論値で確率分布をつくっておく。

※ 二項係数の復習も兼ねて半分までもとめれば、対称に票が埋まっていくことにも気づかせる。

※ 確率を表に埋めさせたあとに答え合わせを行い。間違いは修正させておく。

●発問

「確率の表をもとにヒストグラムを作成しよう。」

※ 答え合わせをし、修正させて次へ進む。

●発問

「ヒストグラムの中で棄却する回数とその確率がどう表れているか考えよう。」

※ 7回のみでなく、8回も棄却される。

※ 7回又は8回なので確率の和の法則に注目させる。

▼ けっして 0.05 と1つの回数の確率の比較で判断させないように注意する。

※ 8回と7回の確率の和が 0.05 以下であるので、7回以上は「起こらない」と見なす。6回まで入れてしまうと、 0.05 を超えてしまうので、6回では、際どいが棄却できない。

※ $p = 1/2$ の立場では、7回以上裏がでるこ

6. 判定にはいる。以下のように説明する。 6.判定する。 仮説H_0: $p = 1/2$ の元で、8回中7回以上裏がでるのは、確率0.05以下である。すなわち、8回中7回以上裏が出るということは、めったに起こらないことになる。 したがって、仮説H_0: $p = 1/2$ より、仮説H_1: $p > 1/2$ である可能性が高い。このことを「有意水準0.05で仮説H_0が棄却（捨てられる）され、仮説H_1」が妥当である。」などという。 ※ <u>H_0が棄却されるか、棄却されないかの判断しかできない。H_1を採用するというような積極的表現は実は間違い。</u>	とは「起こらない」とみなせるので、$p = 1/2$の仮説の妥当性は否定された（棄却された）。ということである。 ※ しかし、H_1を積極的に採択しているわけではないことに注意させる。 ※ H_0を捨てられるかどうかを知ら得るのが仮説検定の本質である。
7. 仮説検定の流れ（手順）を振り返って確認する。 仮説検定の流れ 1.仮説をつくる。 2.「めったに起こらない」確率(有意水準)の確認をする。 3.仮説H_0のもとで参考となる確率モデル（確率分布）を調べる。 ※ シミュレーション、実験の結果の場合もあり。 (表をつくるか、利用する) 4.ヒストグラムをつくる。 5 棄却域を設定する。 H_0を前提にして「めったに起こらない」のはどの範囲（何回以上）だろうか。 6.判定する。 確認後、課題に取り組み学習の成果を自分で試してみる。	※ 課題を用意し、今回学んだ手順で仮説検定を行い、理解を深めさせる。 以下が今回の課題プリントである。
250124 数学 I 「仮説検定の考え方」 <問題> 茶美さんは友人から、「うちの弟、茶太郎（5才）は、食事中、バターを塗った食パンを落とすよね。最近の5日間、1日1回、5日間連続で落としているの。しかも、その5回ともすべてがバターの塗ってある面（以後バター面と呼ぶ）が下になって落ちて、押除が大変で、母がいつもばやいているの。」という話を聞いた。バター面が必ず下になる法則があるに違いないと考えた茶美さんは、課題研究のテーマとして論文をかくことにした。 バター面が下になるという茶美さんの仮説を、今日の授業で学んだ手順に沿って、有意水準0.05で仮説検定せよ。	1年 組 番 氏名 () 授業の感想・質問・興味を持ったところなど書いてください。

2025 3 学期 仮説検定の考え方 ワークシート

1. 仮説を立てよう。

あとで否定されて欲しい仮説 <公平な立場の仮説>

— 「帰無仮説」と呼び — 仮説 H_0 で表す。

主張したい仮説

— 「対立仮説」と呼び — 仮説 H_1 で表す。

★ 仮説を数値で表すとどうなるか。

裏が出る確率を p とすると、

$H_0 : p =$

$H_1 : p =$

2. 仮説 H_0 のもとで、確率を求めよう。

裏が出る回数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	計
確率										

1 年 組 番 氏名 ()

3. 2. の表をもとにヒストグラムをつくってみよう。3.

4. 3. の図に棄却域を設定してみよう。

5. 仮説 H_0 が捨てられる(棄却される)かどうか判定しよう。

②授業活動の実際

120 人の一斉授業で、1 コマ 45 分の時間設定であったため、板書の見にくさと板書とノートの時間を節約するためにスライドとワークシートを用いて授業をおこなった。コンパクトに授業時間内に収まることはできたが、理解の度合いは生徒間でかなりの差があったと思われる。仮説の設定、仮説の数式化、右側検定と両側検定の違い、有水準の意味、ヒストグラムの図上で有意水準がどの何を示しているのかなど回収したワークシートでは記述に差が見られた、あるいは疑問点や質問が書かれていた。仮説検定の授業はその考え方を学ぶ以前に、使用される専門用語が学習者の壁になっていることがわかった。専門用語を用いれば表現や記述が簡潔になるが、初学者にとっては、言葉に縛られてその内容、概念が正しくつかめ切れなくなり疑問になってしまうことが生じやすい。この点を改善していく必要がある。数学 I の単位とはいえ、これらを 2 コマほどの授業で学習していくのには、やはり無理がある。数学 B が全員必修である本校のような場合には、ここではほんとに軽く触れて、あとは数学 B の授業内で詳しくやった方がよいであろう。

5. 授業を振り返って

上の授業の実際にのところにも述べた点ではあるが、具体例を挙げて検討する。

①仮説の論理的不整合の問題

帰無仮説 $p = 1/2$ を設定したら、対立仮説は $p \neq 1/2$ でなければならないのでは？と主張する生徒がいた。また、両側検定だと分布の両裾に 0.025 ずつに確率を分けるが、片側検定だと片側だけで、0.05 の確率を設定するのは片側検定だけ不利(棄却されやすいのではないか)という質問が少なからず出た。数学 I では論理の学習も行っているので、生徒の意見はもつともである。統計学の立場からは、確率は 0.05 であり、片側を用いるときには、その反対側は起こらない前提として検定している。論理性よ

りも確からしさに基準を置いているのである。確からしさと論理的整合性が一致するように思えるが一筋縄でいかないところが統計学を学ぶ難しさの一つである。

②確率を面積でとらえる。

裏が 7 回出ることが棄却されるなら、8 回出ることも棄却される。ということがヒストグラムを利用することでわかりやすくなったが、それでも、7 回の確率と 8 回の確率の和になることが理解しにくいようであった。7 回の確率と有意水準を比較すれば済むのではないかと考えている生徒が少なからずいた。これは、たった 1 例で比較するのではなく起こり得る回数全体のなかで、考えることでより正確に調べているということで説明した。ヒストグラムを利用して棄却域を考える作業は数学 B で仮説検定を学ぶときにかなり役立つはずである。

以上である。今後もこの単元の授業研究は続けていく必要があると考える。