

中学校数学科 学習指導案（略案）

お茶の水女子大学附属中学校 藤原 大樹

1. 日時 令和5年5月15日（月）1校時 8:40~9:30（協議 13:20~14:10）
2. 対象 お茶の水女子大学附属中学校 3年松組 26名
3. 単元・教材 多項式・連続2数の平方の差
4. 本時の目標
 - ①数の性質の証明に式の展開や因数分解を活用することができる。（思考力・判断力・表現力等） ⇒自分で考え、その過程や結果を表現することができる。
 - ②数の計算に式の展開や因数分解を活用することができることを理解している。（知識・技能） ⇒教師の指導を基に理解する。
5. 主題 数と文字の往還を通じた考察と学び深め 問いから問いへ 個別最適な学び

6. 本時の流れ

主な学習活動（T：教師の発問 S：生徒の反応等）	指導上の留意点
<p>1. 成り立つ事柄を予測し、問題を発見する。</p> <p>T「昨日は偶数の話題だったね。今日は奇数です。」</p> <p>T「～さん、連続する2つの奇数を言ってみて。」</p> <p>S「えーっと、7と9です。」</p> <p>T「7と9ですね。では、9^2-7^2を計算すると…」</p> <p>S「(口々に) 32」(他の例も生徒から引き出す。)</p> <p>T「2つの連続する奇数の平方の差はどんな数になるのでしょうか？ 他の例も2分くらいで考えてみて。」</p> <p>S「$5^2-1^2=24$」 S「連続してないよ。」</p> <p>S「$23^2-21^2=88$」 S「偶数だ」 S「8の倍数」</p> <p>S「ちょうど間の偶数の4倍になる」</p> <p>S「負の数でもいえるのかな？」</p> <p>S「$(-1)^2-(-3)^2=-8$でいえる！」</p> <p>T「どんな数になりましたか？ 共通点はあるかな？」</p> <p>S「8の倍数になります。」 S「確かに！」</p> <p>S「間の偶数の4倍です。」 S「おお、本当だ！」</p> <p>T「どちらを証明しましょうか？」</p> <p>S「間の偶数の4倍がいいです。それがわかったら、8の倍数といえるんじゃないの？」 S「確かに。」</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・命題の仮定部を板書し、具体数で結論部を予想させる。 ・2~3例ほど全体で扱い、後は生徒に具体的に考えさせ、帰納的に成り立つことを探らせる。 ・昨年度や前時での経験を基に、負の数を含めて考える生徒も予想される。 ・どの結論部を証明したいか選ばせる。間の偶数の4倍を証明すれば、その他のことも証明したことに繋がることに気付かせる。
<p>問題 2つの連続する奇数の平方の差は2数の間の偶数の4倍になることを証明しよう！</p>	

<p>2. 問題を考察し、対話により新たな気づきを得る。</p> <p>T「では時間を取るので、各自で取り組みましょう。」</p> <p>T「(多くの生徒が2つ目の証明に取り組んでいる頃合いを見計らって) まわりの人はどんな活動をしているでしょうね? 近くの人と確認し合ってみてください。」</p> <p>S「どうなった?」 S「どう文字で置いた?」</p> <p>S「奇数を $2n+1$ と $2n-1$ にした」</p> <p>S「ちょっと待って。まだ終わってないよ。」</p> <p>S「奇数を n と $n+2$ にした」 S「それできるの?」</p> <p>S「偶数も同じおき方でできるね。奇数、偶数に関係なく『差が2の2数の平方の差は間の数の4倍になる』ということがいえるんじゃないかな。」</p> <p>S「あ、もしかして小数でもいえるかも!」</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・時間の限り机間を回り、個別に助言したり励ましたり褒めたりする。苦手な生徒には前時のノートにある証明を参考にさせる。 ・進んだ生徒には、前時を基に「奇数でなかったら(同じようなことはいえるか)?」について統一的・発展的に考えさせる。例えば「偶数なら?」「奇数と偶数が関係ない数なら?(小数を含む)」「2数の差が2でなかったら?」などが予想される。 ・生徒同士の対話では、文字のおき方に着目するように促す。一人で没頭して取り組みたい子も認め、教師が積極的に対話する。 ・進んだ生徒を指名し、板書してもらう。 ・必要に応じて $2.3^2-0.3^2$ などを例に出す。
<p>3. 問題の証明を共有する。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・指名した生徒が板書した証明を基に、手順や要点を捕捉説明する。 <p>T「$(n+1)^2-(n-1)^2=4n$ になり、同じようなことが成り立つことがわかりますね。」</p> <p>T「ところで、こんな工夫をした人がいます。 $(n+1+n-1)(n+1-n+1)=2n \times 2=4n$」</p> <p>S「え??」 S「あ、和と差の積の公式だ!」</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・板書の証明に不足点や誤りがあれば、よりよい表現等を紹介する。 ・上記の多様な問いに触れつつ、「奇数と偶数が関係ない数なら?」に焦点化する。 ・n を(すべての有理)数として証明することで奇数、偶数、小数をすべて含んで「差が2である2数」で証明できたことの価値を共有する。(一方、n とおくと8の倍数の証明には手数が増えることにも触れる。) ・公式「$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$」を板書する。
<p>4. 数の計算への工夫につなげる。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・上記の工夫を教科書 p.36 例2(1)の 55^2-45^2 の計算につなげて説明する。 ・教科書 p.36 問6を解く機会を設ける。 <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>問6 式の展開や因数分解を使って、次の計算をしなさい。</p> <p>(1) 28^2-22^2 (2) 103×97 (3) 101^2</p> </div> <p>T「できた人は近くの人と確認し合ってください。」</p> <p>T「では、答え合わせをしましょう。」</p> <ul style="list-style-type: none"> ・授業を振り返って大切な見方を確認する。 <p>T「今日は、数を文字でおいたり、数を文字のように見たりすることが大切でしたね。数を文字のように見ると、最初の 23^2-21^2 の計算だと…」</p> <p>S「すごい! $44 \times 2=88$ で簡単!!」 S「おお!」</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・数を文字のように見ることの重要性に触れる。 ・時間を許す限り、机間指導する。 ・進んだ生徒に板書してもらう。 ・式の展開や因数分解がどこで使われているかを自覚化させる。(2) 991、(3) 10001の誤答に触れる。算数での概算での確かめの経験を結び付ける。 ・28と22の和、103と97の平均が計算しやすい数になっていることに着目する重要性に気付かせる。 ・授業冒頭の数での計算に戻り、筆算しなくても能率的に計算できると気付かせる。

[参考1] 本時の最終板書

5/15(月) 数と文字を行き来して考えよう!

連続する2つの奇数の平方の差(②-①)は2数の間の数の4倍になることを証明しよう!

具体的な例として

- $15^2 - 13^2 = 56$ ← 14×4 (偶数)
- $33^2 - 31^2 = 128$ ← 8 の倍数
- $25^2 - 23^2 = 96$ ← 32×4
- $9^2 - 7^2 = 32$ ← 8 (まん中の数の4倍)
- $1^2 - (-1)^2 = 0 < 0 \times 4$

【証明】 $2n+1, 2n+3$
 n は整数とする。2つの連続する奇数は、 $2n+1, 2n+3$ と表せる。
 $(2n+3)^2 - (2n+1)^2 = 4n^2 + 12n + 9 - (4n^2 + 4n + 1) = 4n^2 + 8n + 8 = 4(n^2 + 2n + 2) = 4(n+1) \times 4$
 $n+1$ は2つの奇数の間の数なので、 $4(n+1)$ は2数の間の数の4倍である。
 よって差が2つの奇数の平方の差は2数の間の数の4倍になる。

奇数でなかったら...? 整数でなかったら...?
 $(n+2)^2 - n^2 = (n+2+n)(n+2-n) = (2n+2) \times 2 = 4n+4$
 これを数の計算にも応用できる!
 $55^2 - 45^2 = (55-45)(55+45) = 10 \times 100 = 1000$
 $101^2 = (100+1)^2 = 10000 + 200 + 1 = 10201$
 $28^2 - 22^2 = (28+22)(28-22) = 50 \times 6 = 300$
 $103 \times 97 = (100+3)(100-3) = 10000 - 9 = 9991$

[参考2] 前時の板書

5/8(月) 数の性質について探究しよう!

連続する2つの偶数の積に1を足すと、その間の奇数の平方になることを証明しよう!

【証明】 n を整数とする。
 2つの連続する偶数は $2n, 2n+2$ と表せる。
 $2n \times (2n+2) + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2$
 $2n+1$ は2つの偶数の間の奇数なので、連続する2つの偶数の積に1を足すと、その間の奇数の平方になる。

偶数でなかったら...? 奇数でなかったら...?
 $(2n-1)(2n+1) + 1 = 4n^2 - 1 + 1 = 4n^2 = (2n)^2$
 連続する(差が2)でなかったら...?
 $3 \times (3+4) + 1 = 22$
 $3 \times (3+4) + 4 = 25$
 差が4 -1 +1
 差が2の2つの数の積に1を足すと、その間の数の平方になるという。

具体的な数を基に、「何が(仮定部)何になる(結論部)か」を帰納的に予想し、それを言語化していく。

問題をつくり、命題が成り立つことを演繹的に証明する。(見通しは困っている生徒を確認した時機に取り上げる)

元の命題を証明した後、「そうでなかったら」について統合的・発展的に考える。数学的な探究の楽しさに触れる。

板書の基本・応用

視覚化，ラベリング，矢印

<p>(日付け，テーマ・めあて)</p> <p>(漠たる問い，大きな問い)</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; text-align: center; width: fit-content; margin: 10px auto;"> <p>問題</p> </div> <p>(予想や使いそうなこと)</p>	<p>[考え方1]</p> <p>[考え方2]</p>	<p>[考え方3]</p> <p>(関連付けやまとめ)</p>
---	------------------------------------	--

4/26(水) 式の利用
 道幅が一定の道路があります。(正方形)
 この道路の面積をいろいろな方法で求めよう！(展開した形)

[考え方1]
 $(2a+x)^2 - x^2 = 4a^2 + 4ax + x^2 - x^2 = 4a^2 + 4ax$

[考え方2]
 $a \cdot 4 + ax \cdot 4 = 4a + 4ax$

[考え方3]
 $(a+2a+x) \times a \times 4 = (2a+2x) \times 2a = 4a^2 + 4ax$

[考え方4]
 $4(a(2a+x)) - 4a^2 = 4a(2a+x) - 4a^2 = 4a^2 + 4ax$

[考え方5]
 $a \times (x+x+2a+x+2a+x) = 4ax + 4a^2$

[考え方6]
 $a(2+a) \times 4 = 4a(2+a) = 4ax + 4a^2$

道幅一定の道路の面積 = (道幅) × (センターラインの長さ)

板書の基本・応用

補助板書，別の見方や解き方

<p>(日付け，テーマ・めあて)</p> <p>(漠たる問い，大きな問い)</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; text-align: center; width: fit-content; margin: 10px auto;"> <p>問題</p> </div> <p>(予想や使いそうなこと)</p>	<p>[考え方1]</p> <p>[考え方2]</p>	<p>[考え方3]</p> <p>(関連付けやまとめ)</p>
---	------------------------------------	--

4/7(月) 展開する前の式について考えよう!

例 $x^2 + 6x + 8 = (x+2)(x+4)$

問1 (1) $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$
 (2) $x^2 + 9x + 8 = (x+1)(x+8)$
 (3) $x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5)$
 (4) $x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4)$

問2 (1) $x^2 + x - 12 = (x+4)(x-3)$
 (2) $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$
 (3) $x^2 - 2x - 15 = (x-5)(x+3)$
 (4) $x^2 + 4x - 5 = (x+5)(x-1)$
 (5) $-x^2 - 11x - 10 = -(x+1)(x+10)$

問3 (1) $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$
 (2) $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$
 (3) $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$
 (4) $x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$
 (5) $a^2 + 2a + 36 = (a+6)^2$
 (6) $y^2 - 14y + 49 = (y-7)^2$

問4 $x^2 + 0x - 25 = (x-5)(x+5)$
 $x^2 - 25 = (x-5)(x+5)$
 $x^2 - 36 = (x-6)(x+6)$
 $1 - y^2 = (1+y)(1-y)$
 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
 $6xy - 3xy^2 = 3xy(2-x)$
 $x^2 + 10x + 24 = (x+4)(x+6)$
 $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$
 $x^2 - 12x + 36 = (x-6)^2$

板書の基本・応用

「じっくり法」と「サクサク法」

(日付け, テーマ・めあて) (漠たる問い, 大きな問い) <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center; margin: 10px 0;"> 問題 </div> (予想や見えそうなこと)	[考え方1]	[考え方3]
	[考え方2]	(関連付けやまとめ)

