中３卒業期の課題学習

立方体の切断について深く考察しよう

お茶の水女子大学附属中学校
藤原　大樹

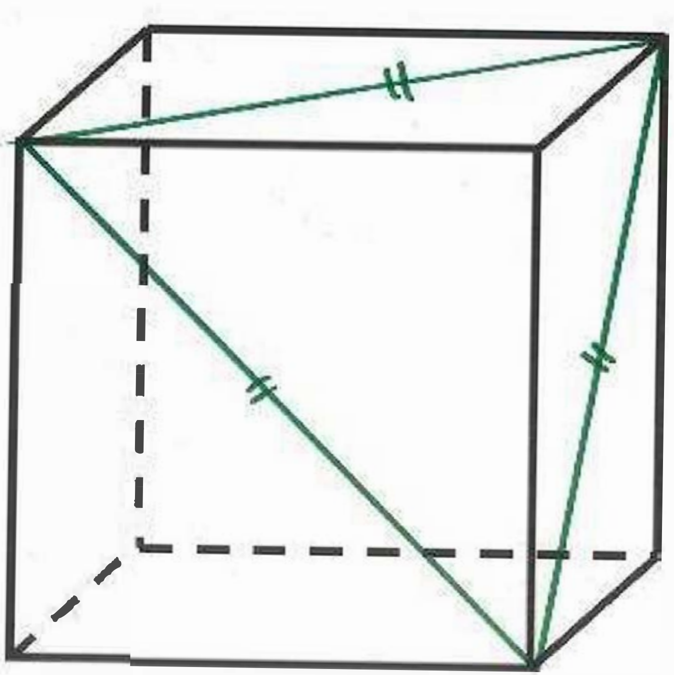
（令和３年３月）

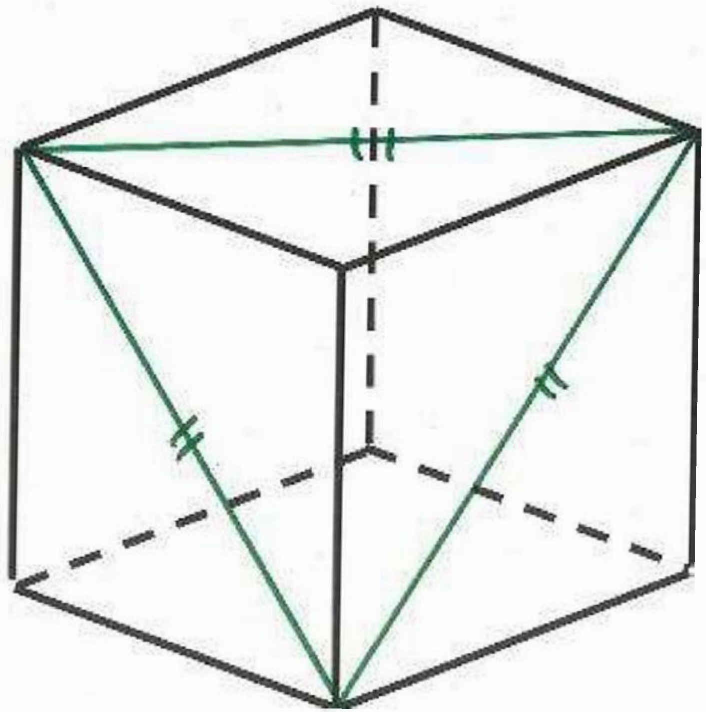
- 指導時期　　中３の卒業期（受験期）
- 指導のねらい　　立体を平面で切断したときの性質（切断面の図形，周の長さ，面積，その関係）について，領域横断的に，かつ複数の図を関連付けて考察し表現する力を高める。
- 指導の流れ　　前時まで：正四面体のねじれの位置にある２辺に平行な平面で切断したときの切断面の図形，まわりの長さ，面積について考察した。第1時：それを受けて，三角形，四角形，五角形，六角形などの各図形を班で分担し，「何を求めるか」などを問題を自ら作って，わかったことをA3用紙に個人または数名で整理する。第2時：次の時間にこれを黒板に貼り付けたり，その画像をGoogleクラスルームに掲載したりして共有し，意見交換した。ノートにはワークシートを貼り，考えたことや解釈したことを整理していった。第3時：第2時で盛り上がった問い，例えば一般の台形はできるか，正五角形はできるか，辺の中点以外を結んで正六角形はできるか，などを全体で取り上げ，皆で考えた。

- 以下，生徒の反応（２クラス分）と生徒2名のノートである。なお，いくつかのスライドには，閲覧する生徒に注目してもらうために「ホントかな？」を授業者が付けた。

切り口： 正三角形

担当：





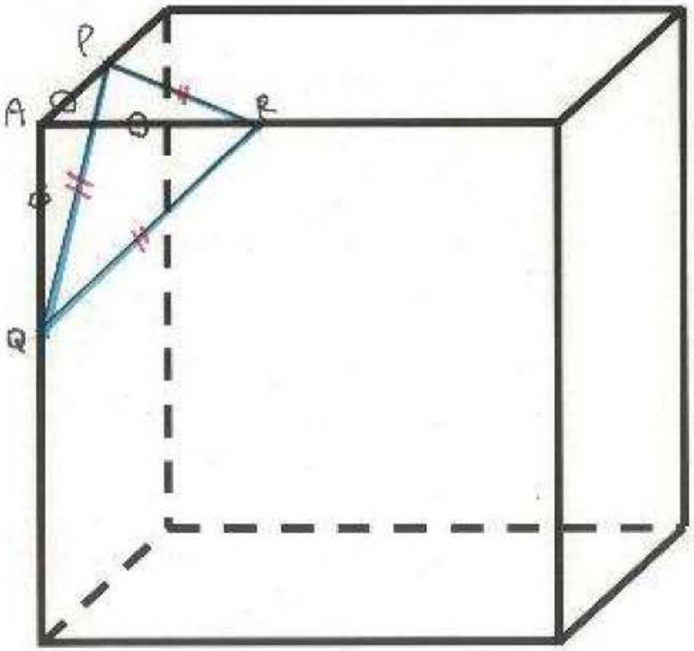
【気付いたことなど】

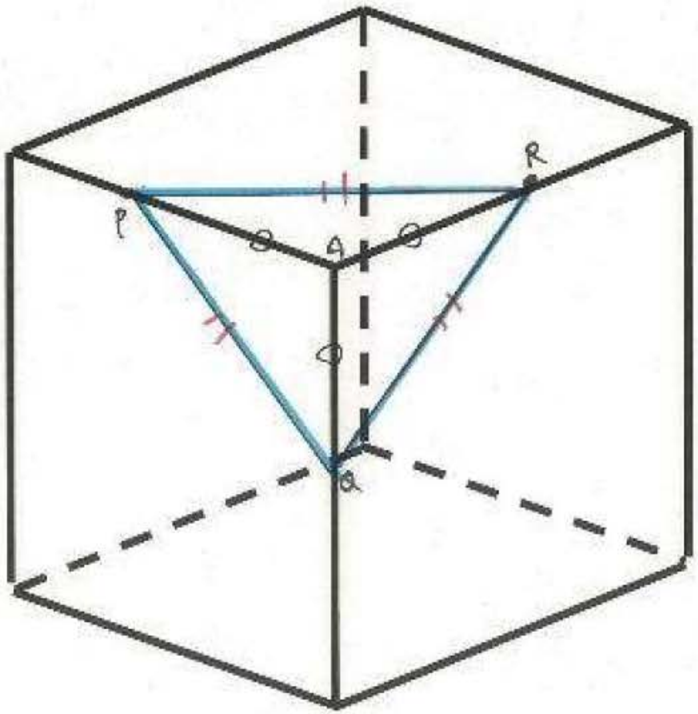
周の長さ…$18\sqrt{2}$　$(6\sqrt{2} \times 2)$

面積…$18\sqrt{3}$　$(3\sqrt{2} \times 3\sqrt{6})$

$\rightarrow 6\sqrt{2} \times \frac{1}{2} \times 3\sqrt{6}$

切り口：正三角形　　　　　担当：





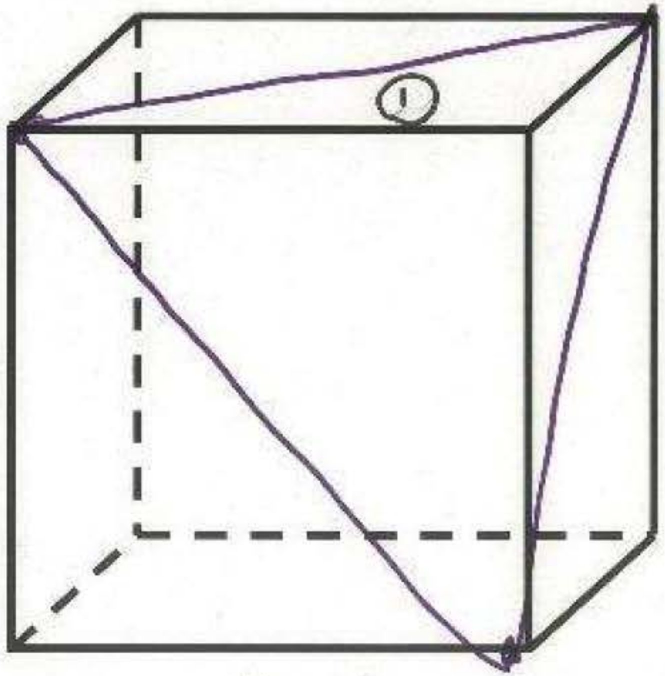
【気付いたことなど】

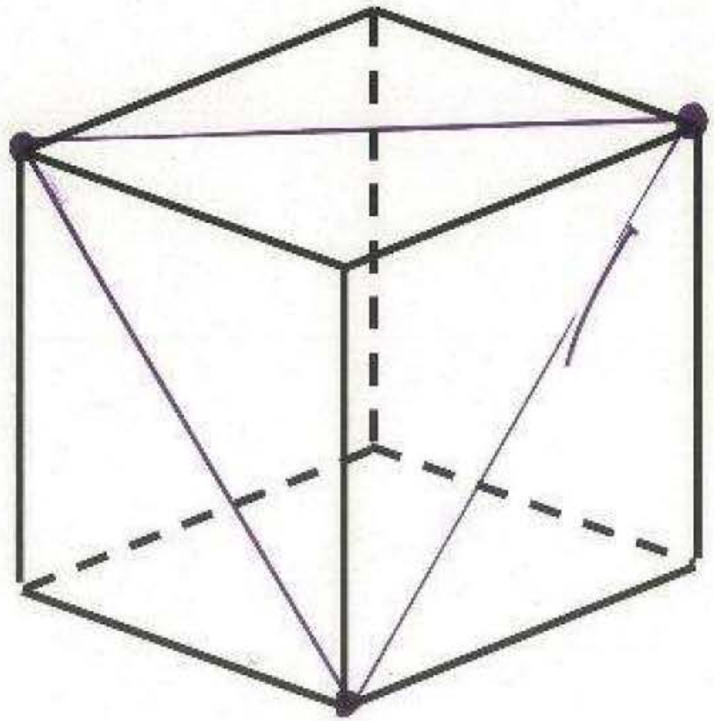
~~AP=AQ=ARの場合~~
~~PR=PQ=QRになるので~~
~~正三角形になる~~
~~PR:PQ:QR=√2:√2:√2~~
~~=1:1:1~~

AP=AQ=AR のとき
PR=PQ=QR になるので
正三角形になる
PR:PQ:QR=$\sqrt{2}:\sqrt{2}:\sqrt{2}=1:1:1$

切り口：

担当：正三角形





【気付いたことなど】

① $= 6 \times 6 \times \frac{1}{2} = 18$ cm²

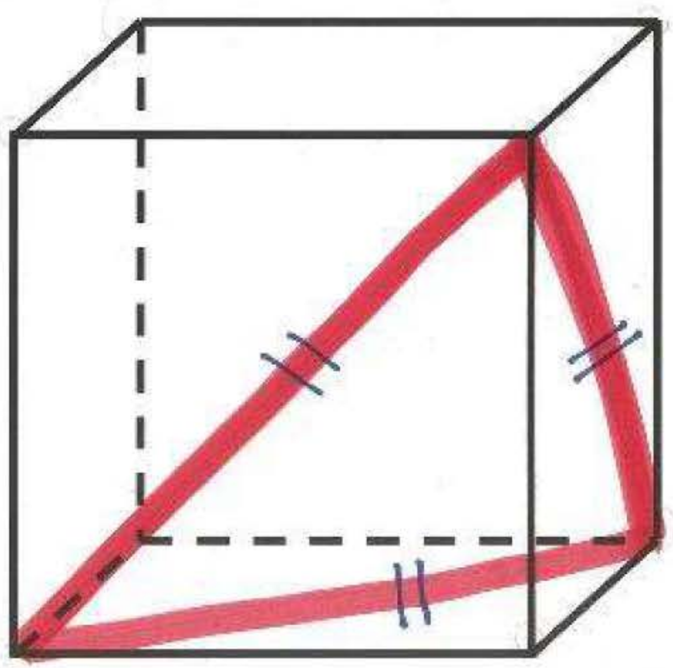
体積は $6 \times 6 \times 6 \times \frac{1}{3}$ 36 cm³

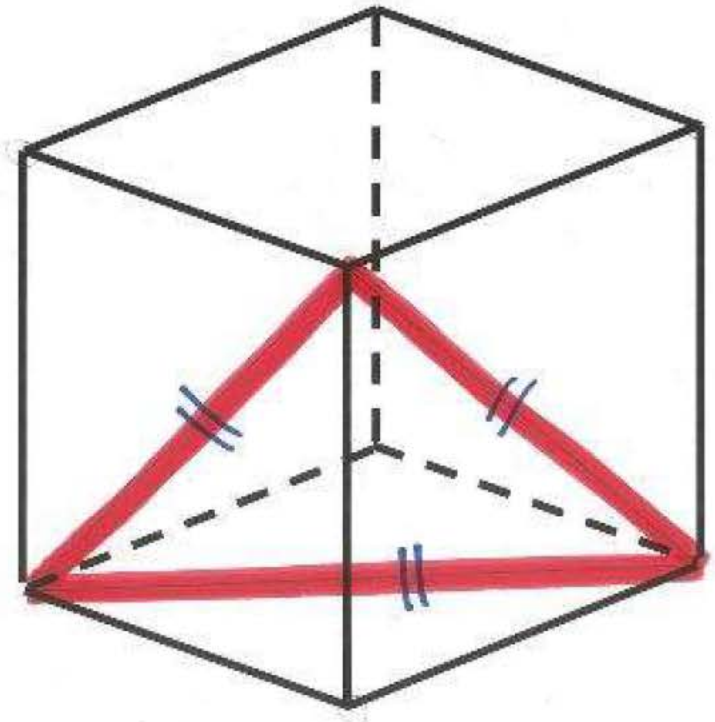
切り口の面積は $6\sqrt{2} \times 3\sqrt{6} \times \frac{1}{2}$

$18\sqrt{3}$ cm²

切り口：正三角形

担当：



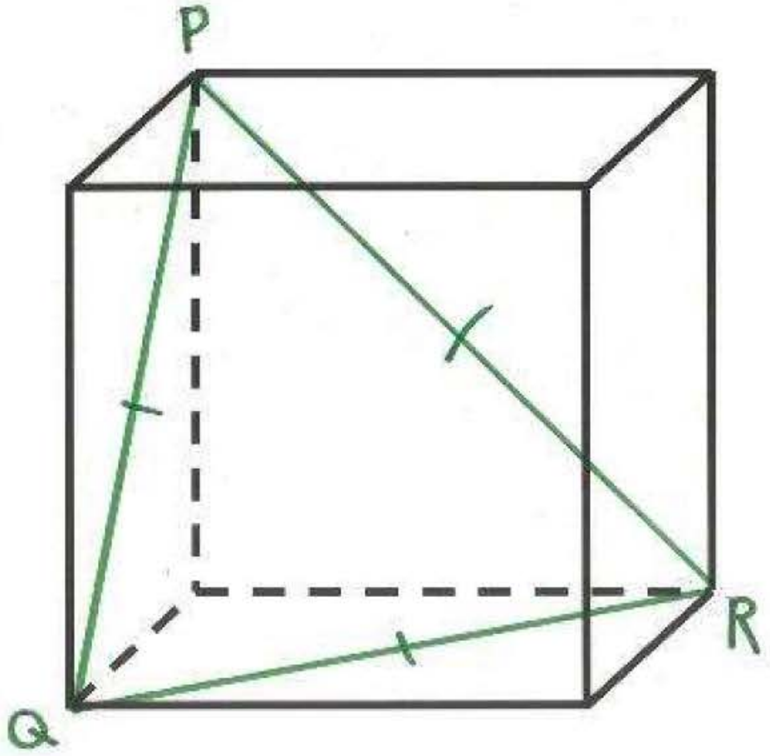


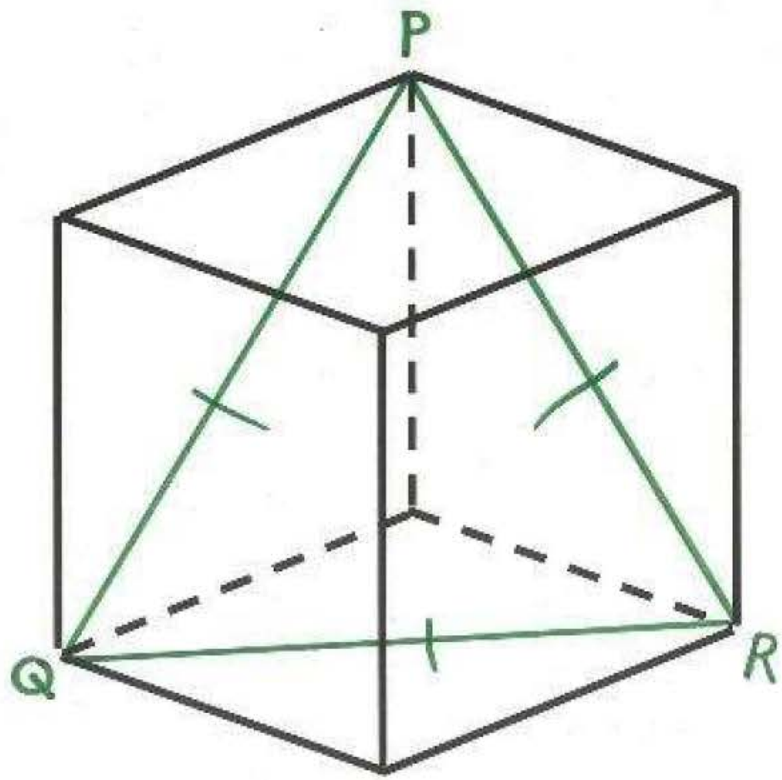
【気付いたことなど】

・1辺の長さは $6\sqrt{2}$

・面積は $6\sqrt{2} \times 3\sqrt{6} \times \frac{1}{2} = 18\sqrt{3}$

切り口：　正三角形　　　　　　　　　　担当：

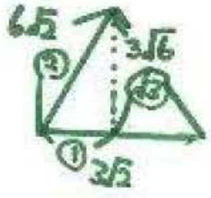




【気付いたことなど】

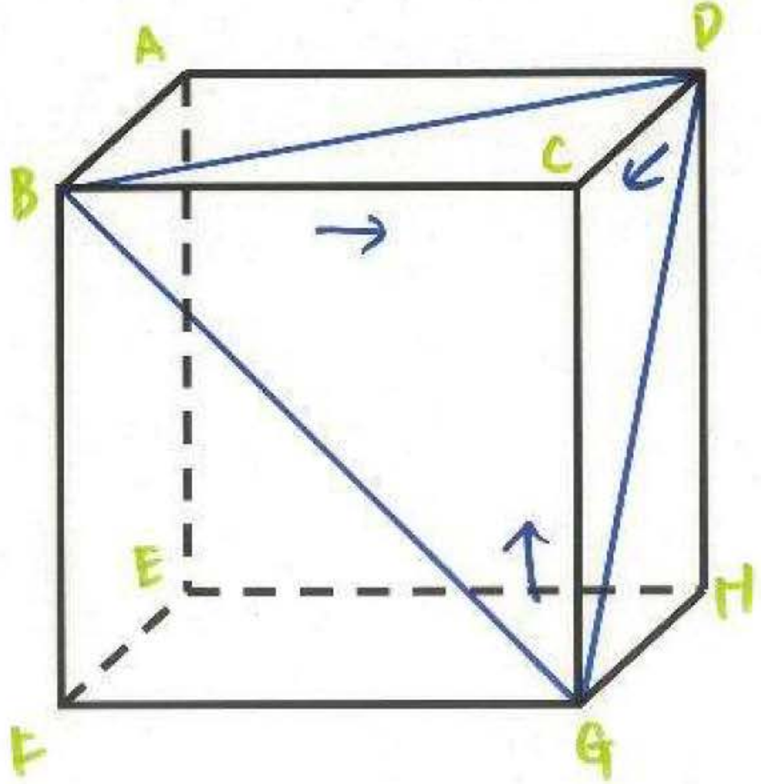
・直線 PQ, PR, QRは $1:1:\sqrt{2}$ より $6\sqrt{2}$
・3辺すべての直線の長さが等しくなるため、正三角形になる。

・$PQ=PR=QR=6\sqrt{2}$
・面積は $18\sqrt{3}$ $(6\sqrt{2}\times3\sqrt{6}\times\frac{1}{2})$



切り口： 正三角形

担当：



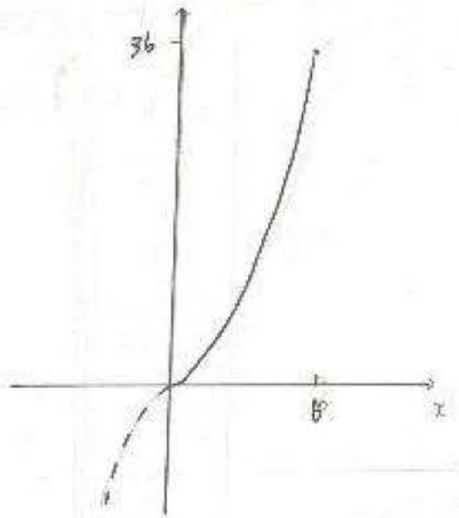
【気付いたことなど】

・1辺の長さ → $6\sqrt{2}$

・点B.D、Gでなければいけないというわけではなく
隣り合ってる3面を選んで対角線をもう一つの対角線と合わせればよ

PQRを左図のように同じ分だけ動かしてみると△PQRの体積の変化のり

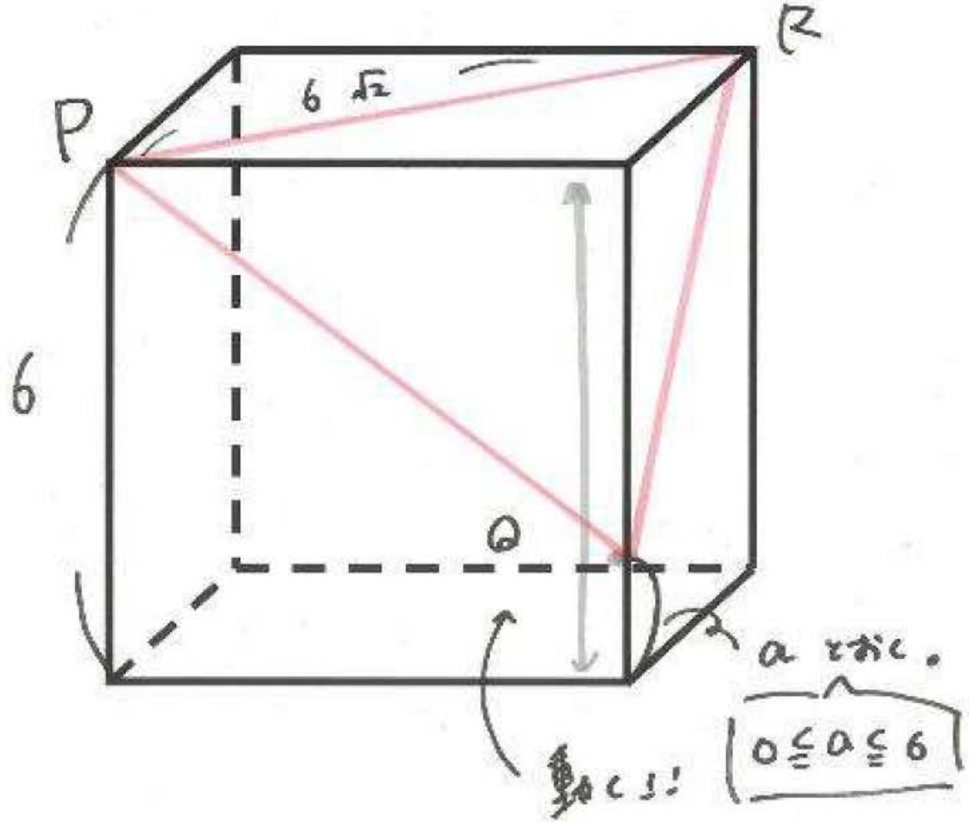
$y = \frac{1}{6}x^3$



切り口：　二等辺三角形

（→正三角形）

担当：



【気付いたことなど】　面積：S

∴ $a=0$ の時。

$S = 6\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 18\sqrt{3}$

↳ 正三角形

∴ $0 < a < 6$ の時。

$S = 6\sqrt{2} \times \sqrt{((6-a)^2 + 6^2) - (3\sqrt{2})^2} \times \frac{1}{2}$

↳ 二等辺三角形

√ の中

$36 - 12a + a^2 + 36 - 18$

$a^2 - 12a + 54$

↳ 2次方程式

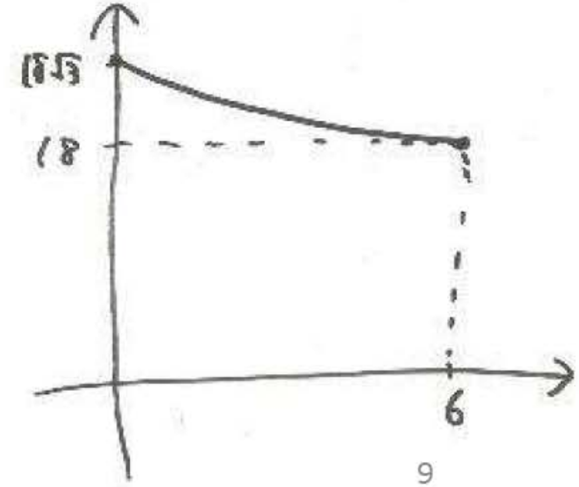
∴放物線

∴ $a=6$ のとき。

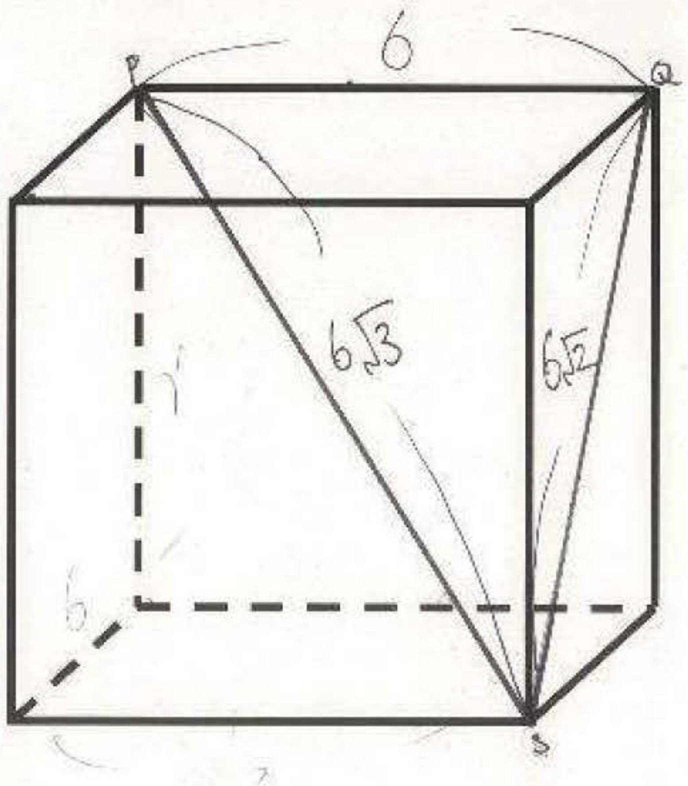
$S = 6 \times 6 \times \frac{1}{2}$ → 二等辺三角形

$= 18$

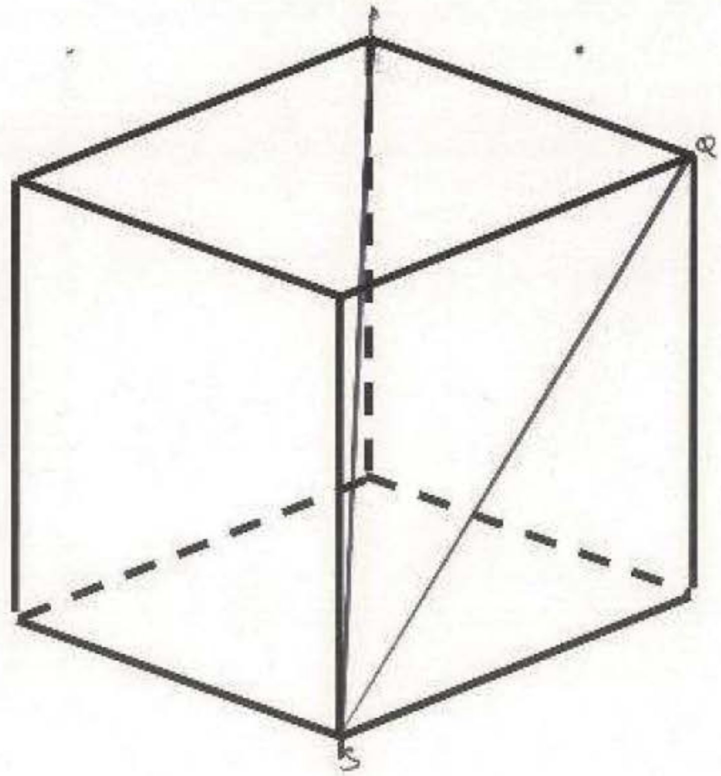
∴ GeoGebra より。



切り口：∠PQS=90の直角三角形



担当：



【気付いたことなど】

$PQ=6$

$QS=6\sqrt{2}$

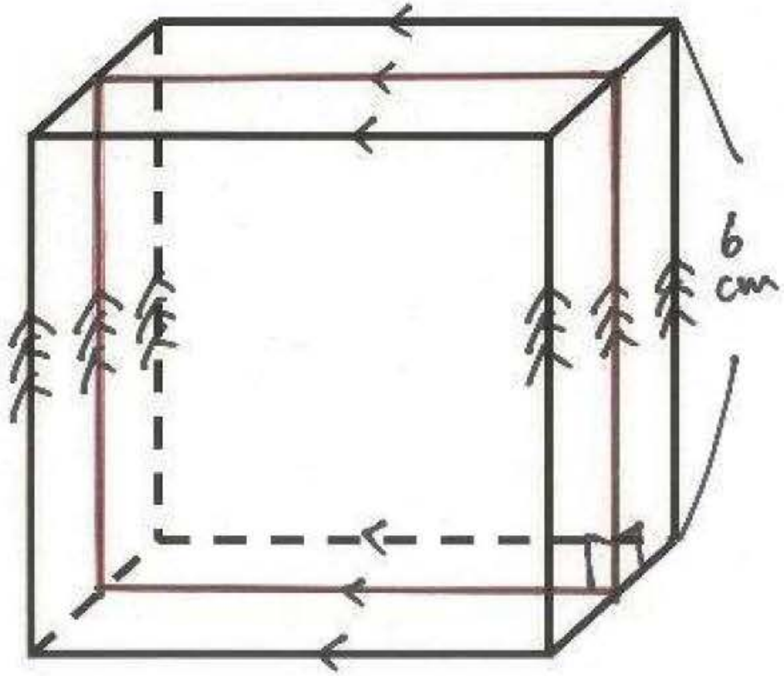
$PS=6\sqrt{3}$

面積：$18\sqrt{2}$ cm²

周の長さ：$(6+6\sqrt{2}+6\sqrt{3})$

ホント？

切り口： 正方形　　　　　担当：



【気付いたことなど】

周長：24cm

面積：36cm²

、各辺が立方体の一辺と平行

、四面を通る かつ 他二面と平行

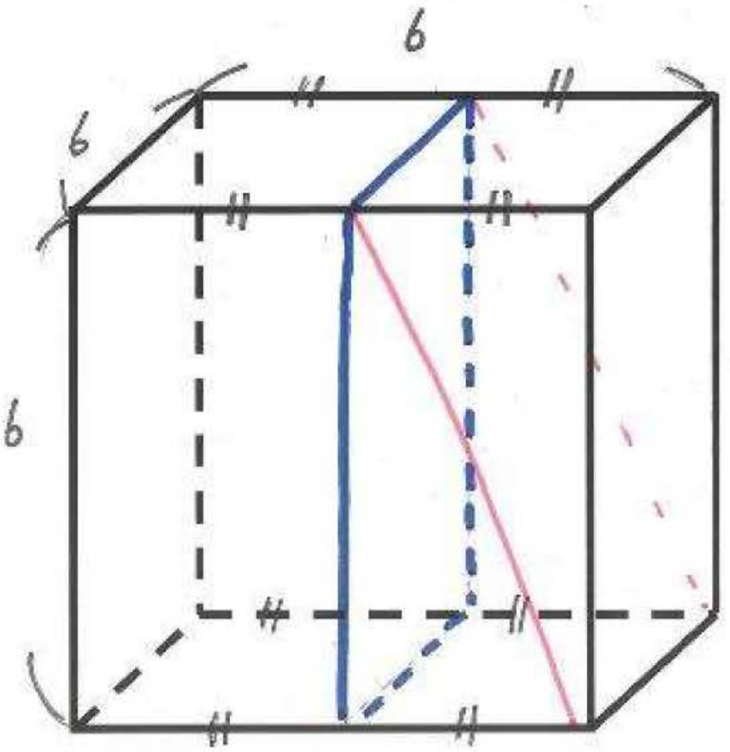
、各辺が二面に垂直である

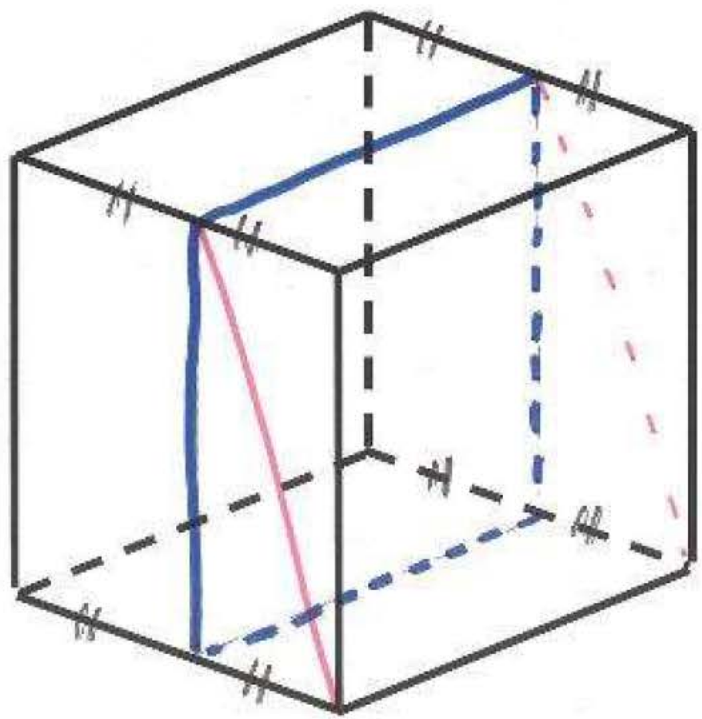
、これ1つのみ 描きない

、立方体の面と合同である

切り口：　正方形

担当：





【気付いたことなど】

- 1つ分の体積 … $6\times3\times6=108$ 　 $\underline{108cm^3}$
- 2つ分の体積 … $6\times6\times6=216$ 　 $\underline{216cm^3}$

ちょうど半分になる。

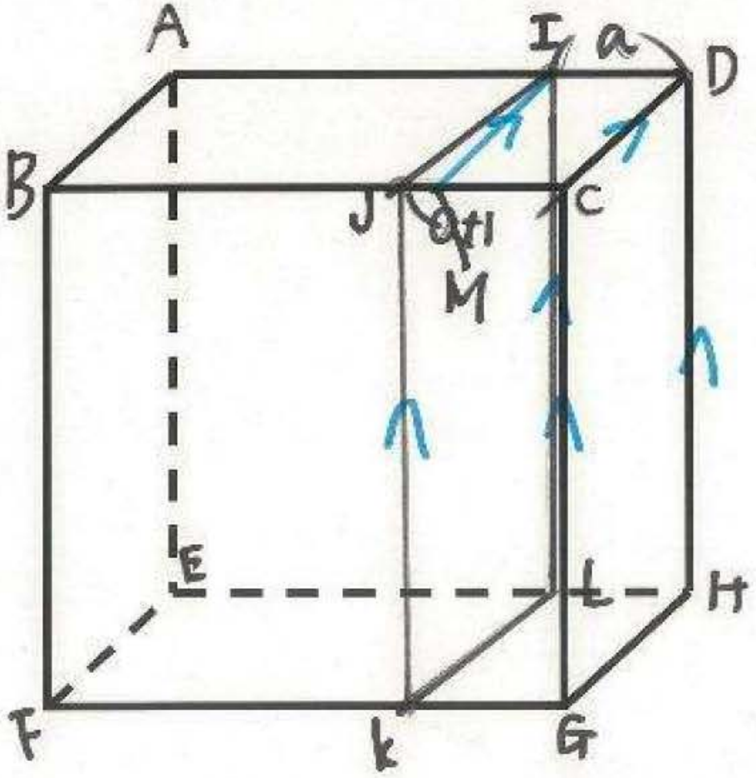
- 切り口の周りの長さ … $6\times4=24$ 　 $\underline{24cm}$

- 真ん中ではなく、ピンクの線の切り口で切ると、切り口は正方形ではなく、長方形になる。
- 正方形とは、四つの内角が全て直角で、四辺の長さが等しい四角形の事である。
  辺の中点をそれぞれ通るように切った切り口は、四辺の長さが等しく、四つの内角が全て直角なので、正方形だと言える。

切り口：長方形

担当：

【気付いたことなど】



辺DCに平行な線IMをひくと. DC//IM

$\angle DCM = \angle IMJ = 90^\circ$

直角三角形IJMにおいて三平方の定理よ

$(a+1-a)^2 + 6^2 = IJ^2$

$1^2 + 36 = IJ^2$

$\sqrt{37} = IJ$ 同様に辺KLも$\sqrt{37}$(IJ//KL

辺JK,ILは辺CG,DHと平行であるため

$JK = IL = CG = DH = 6$。

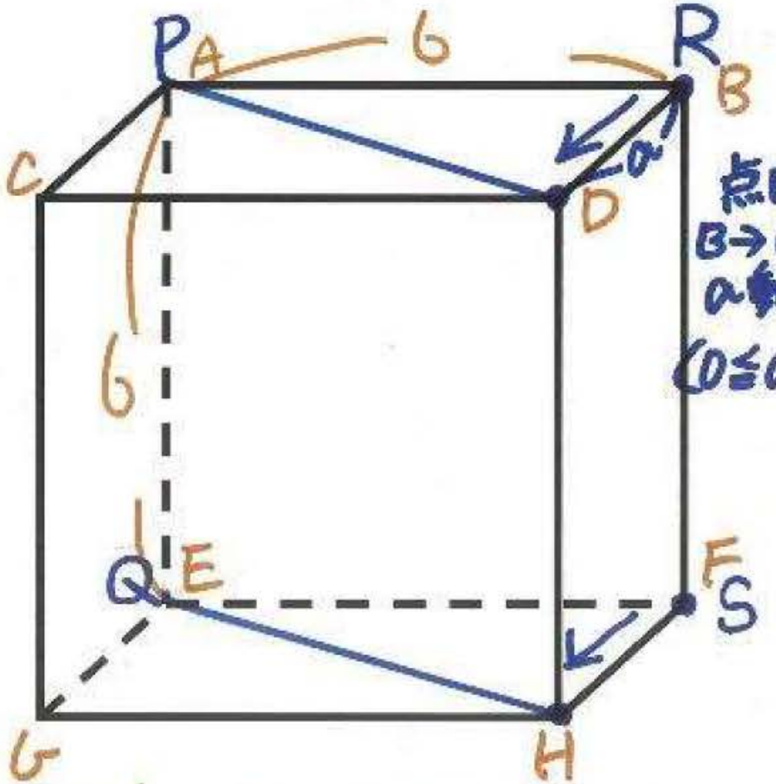
辺CGは面ABCDに垂直に交わるため辺CG

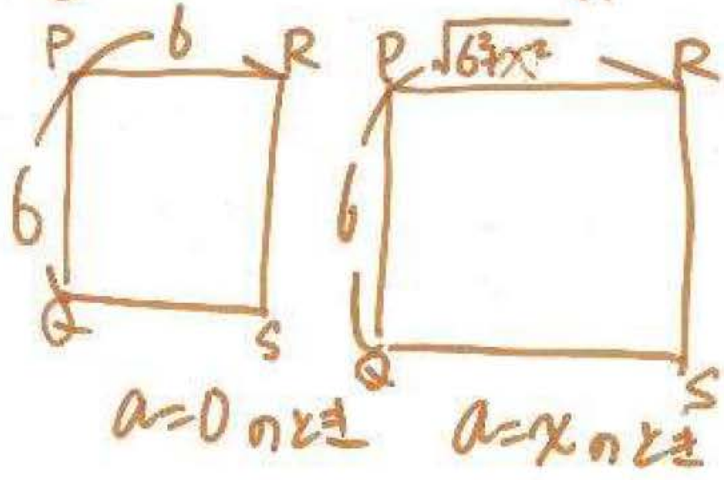
平行な辺JKも同様に面ABCDと垂直に交わ

るから$\angle IJK = 90^\circ$(他の角も同様)

よって四角形IJKLは長方形である。

切り口： 長方形　　担当：

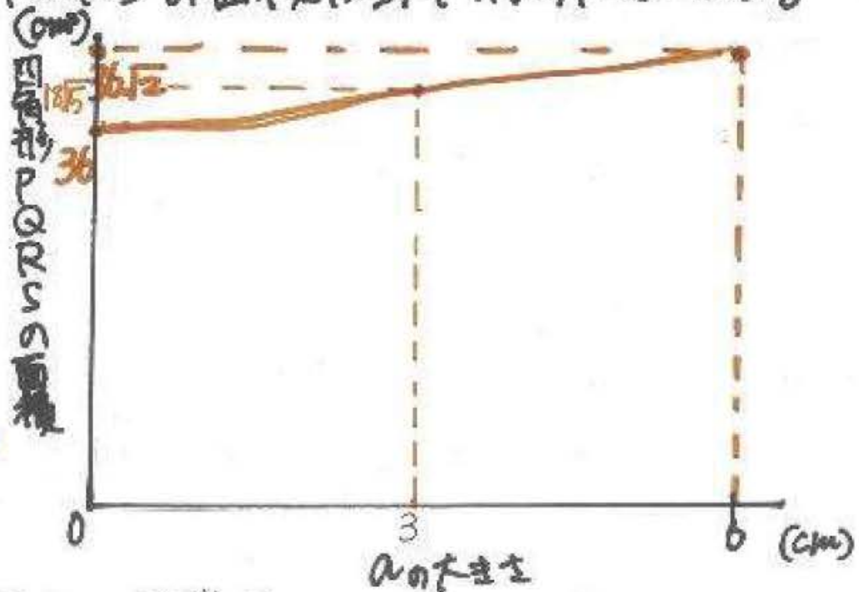




【気付いたことなど】

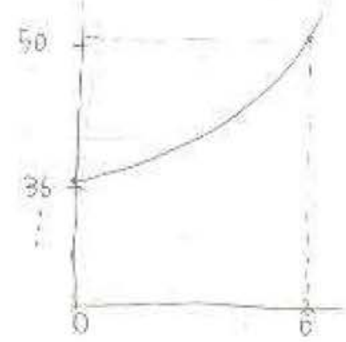
左の図のように動かしたとき、
四角形PQRSの面積は以下のように表せる。

HF⊥RS
である。



四角形PQRSの面積は

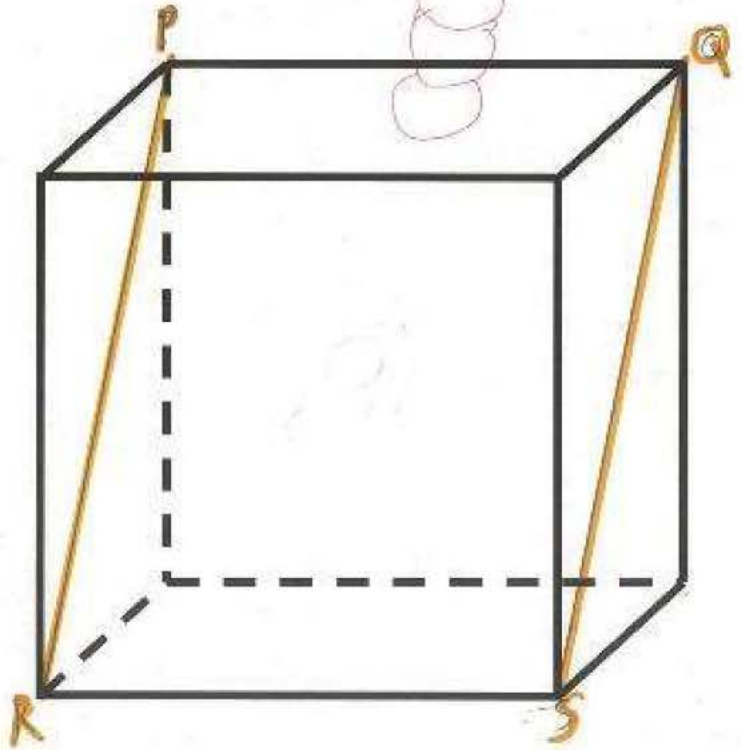
$6\sqrt{6^2+a^2}$ cm² といえる。

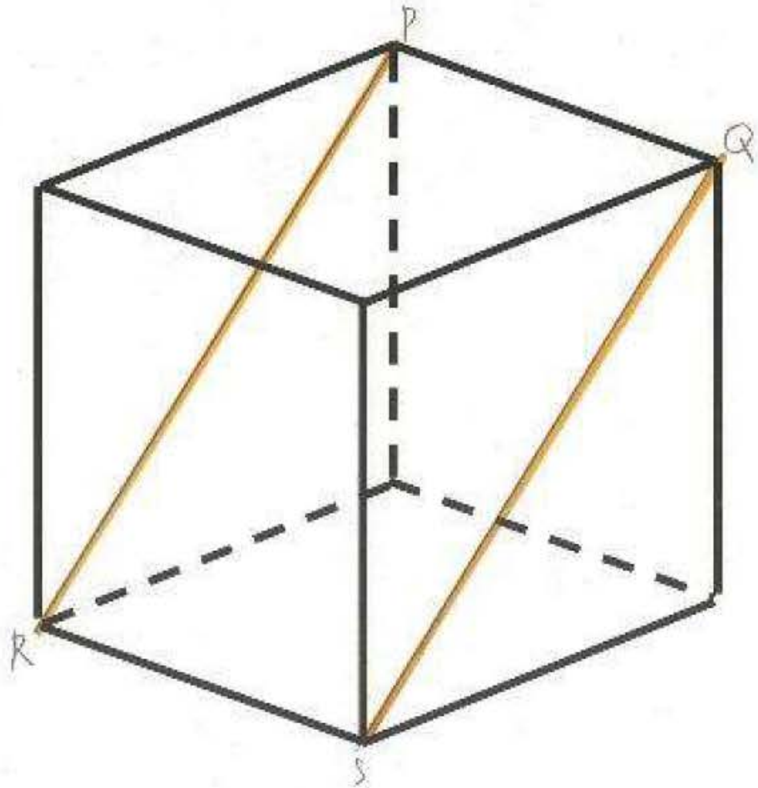


← GeoGebra より

切り口：長方形

担当：





【気付いたことなど】

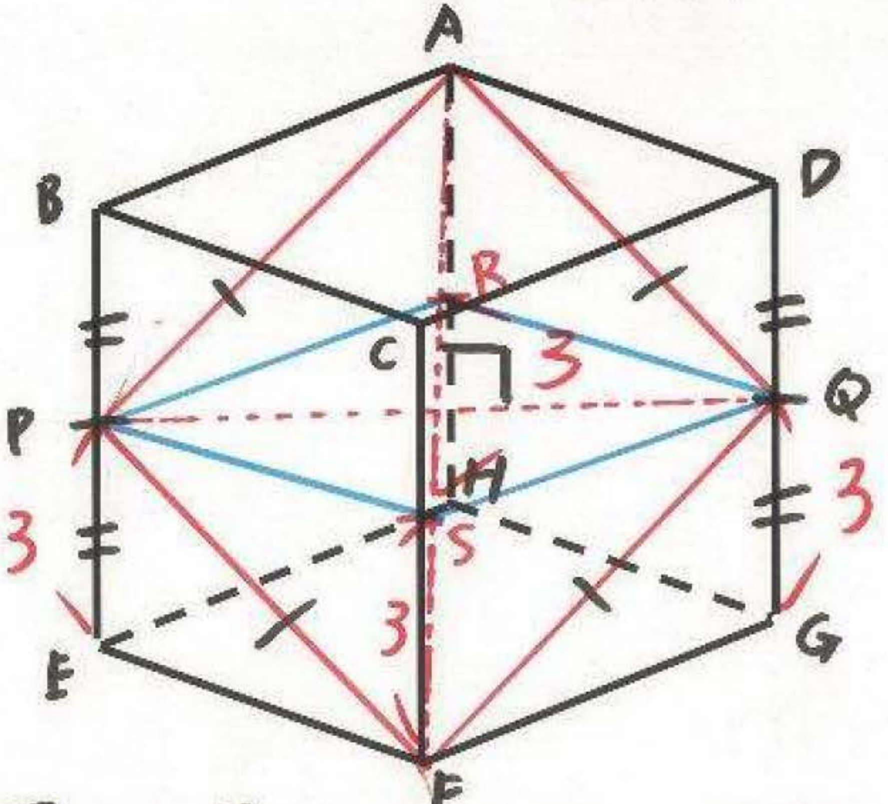
辺PR 辺QSは 長さが $6\sqrt{2}$（対角線）

辺PQ 辺RSは 6cm

面PQRSの面積は $6\sqrt{2}\times6=36\sqrt{2}$ cm²

切り口： ひし形　　　担当：

$BP=EP,\ DQ=GQ$ とする。



【気付いたことなど】

$AP=AQ=FP=FQ$

正方形とはいえない

(理由) 正方形ABCDの点B,C,Dが下が
った点がP,Q,Fと考えると、∠PAQが
鋭角になるから。

点Hを含む体積

四角形EFGHを底面積とすると

高さは点AとFがPとQと同じ

高さであるRとSに移動すると

考えると、$6\times6\times3=108$

$108\ \mathrm{cm}^3$

周りの長さ $AP\times4=3\sqrt{5}\times4=12\sqrt{5}$ cm

面積 $=AF\times PQ\times\frac{1}{2}=6\sqrt{3}\times\cancel{6}^{3}\sqrt{2}\times\frac{1}{\cancel{2}}$

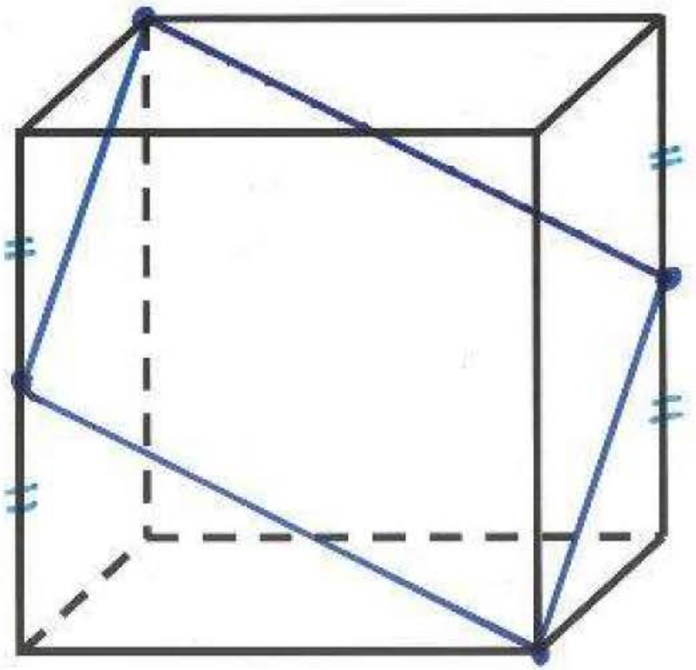
$=18\sqrt{6}\ \mathrm{cm}^2$

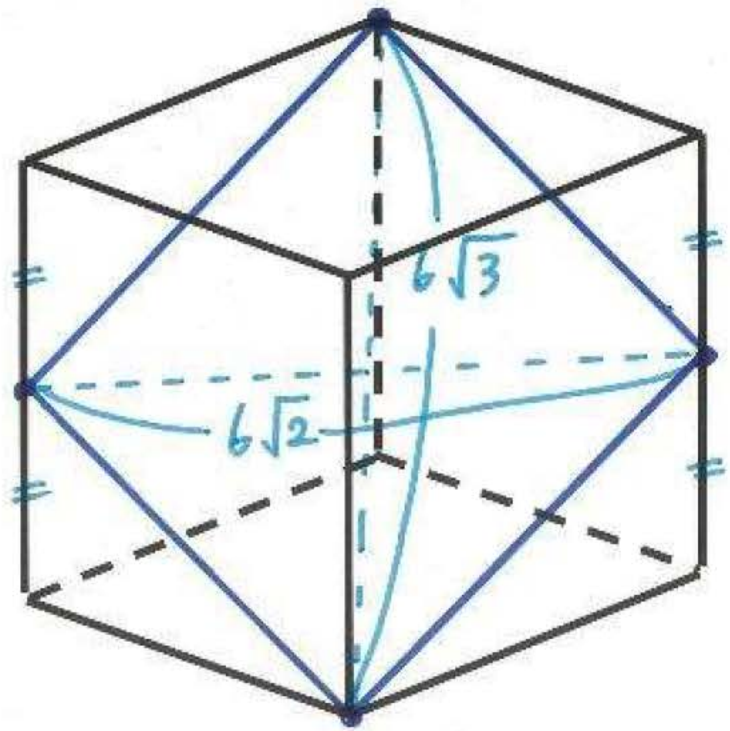
$AR=HR$

$CS=FS$

切り口：　ひし形

担当：





【気付いたことなど】

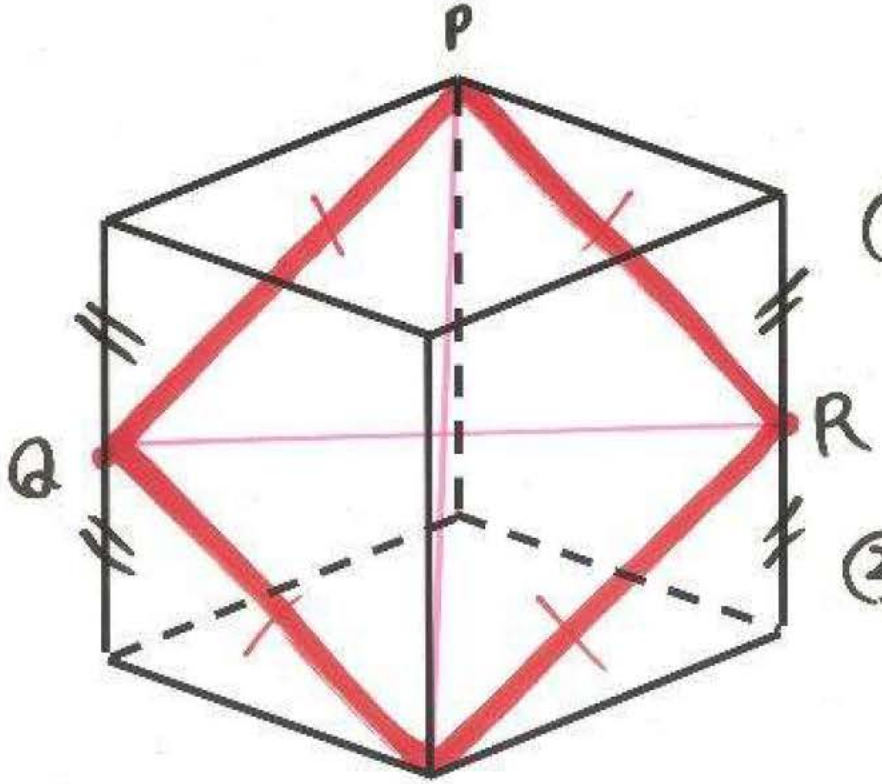
・1辺は $3\sqrt{5}$ cm → 周りの長さ $12\sqrt{5}$ cm

・面積は $18\sqrt{6}$ cm^2 $\left(6\sqrt{2}\times 6\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\right)$

切り口：ひし形

担当：

【気付いたことなど】



切り口が正方形ではなく
ひし形である理由

① 対角線の長さが
等しくない。

② 三平方の定理の逆が
成り立たない。

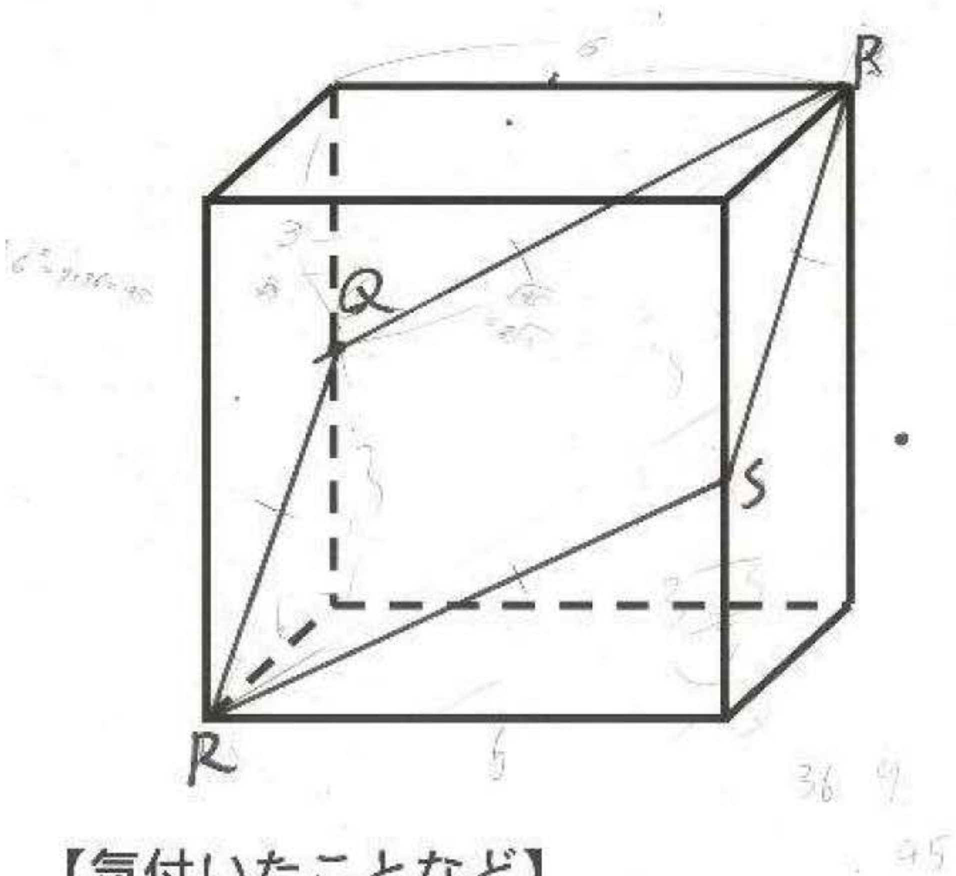
一辺を6としたとき、$PQ^2=3^2+6^2$　$PQ=3\sqrt{5}$

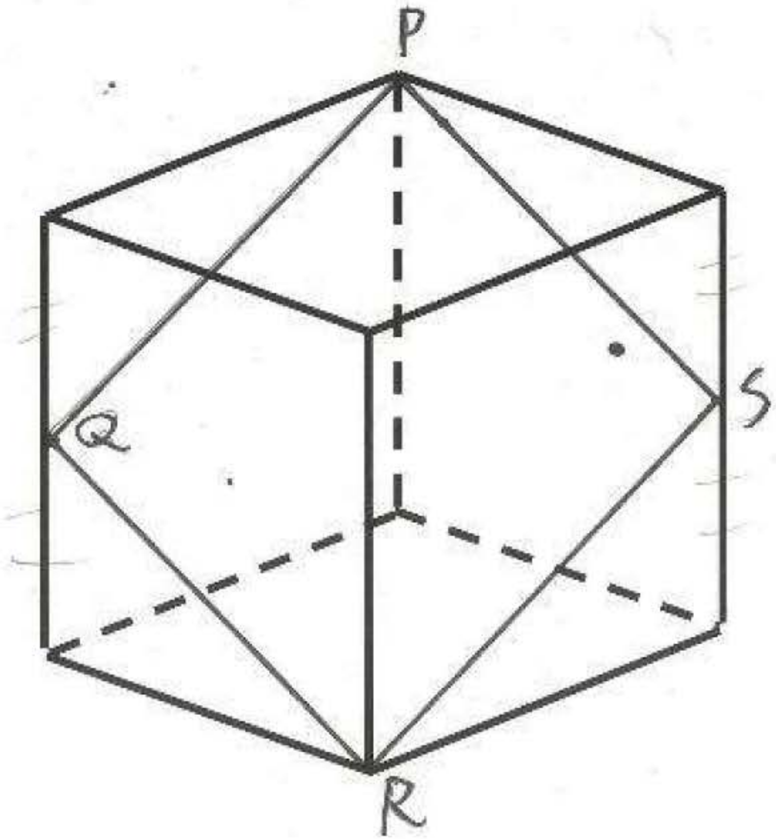
$QR=6\times\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

$PQ^2+PR^2=45+45=90\neq QR^2=72$

形：　ひし形

担当：

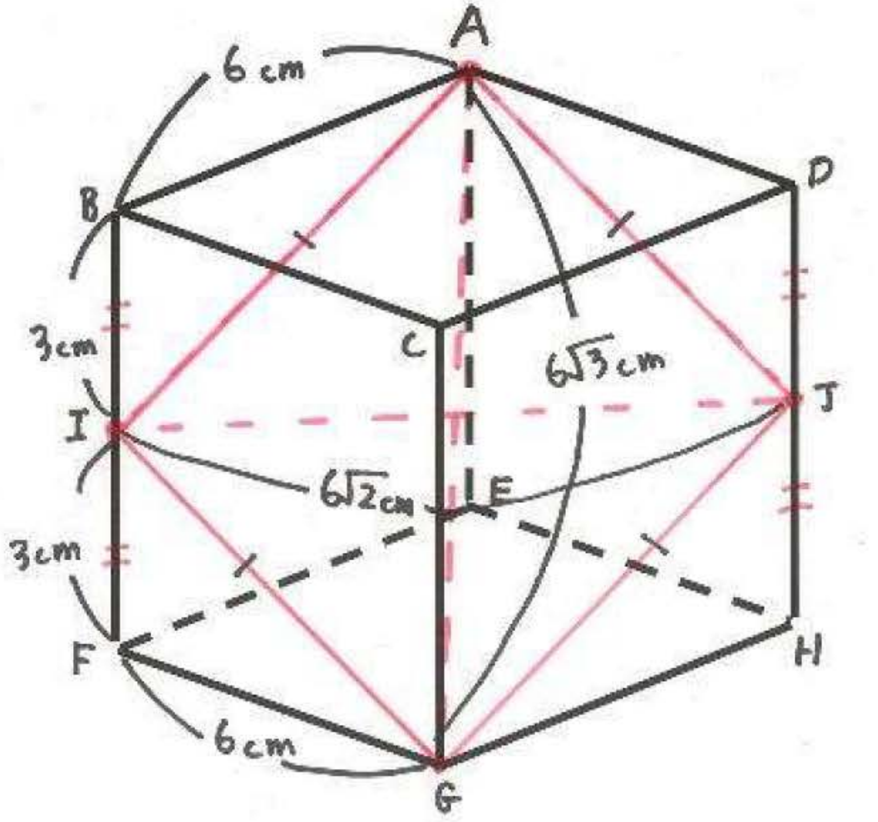




【気付いたことなど】

$PQ=QR=RS=SP=3\sqrt{5}$

切り口：ひし形　　　　　　　　　　　　　　　　担当：



【気付いたことなど】

周の長さ

$3\sqrt{5}$cm × 4つ = $12\sqrt{5}$cm

面積

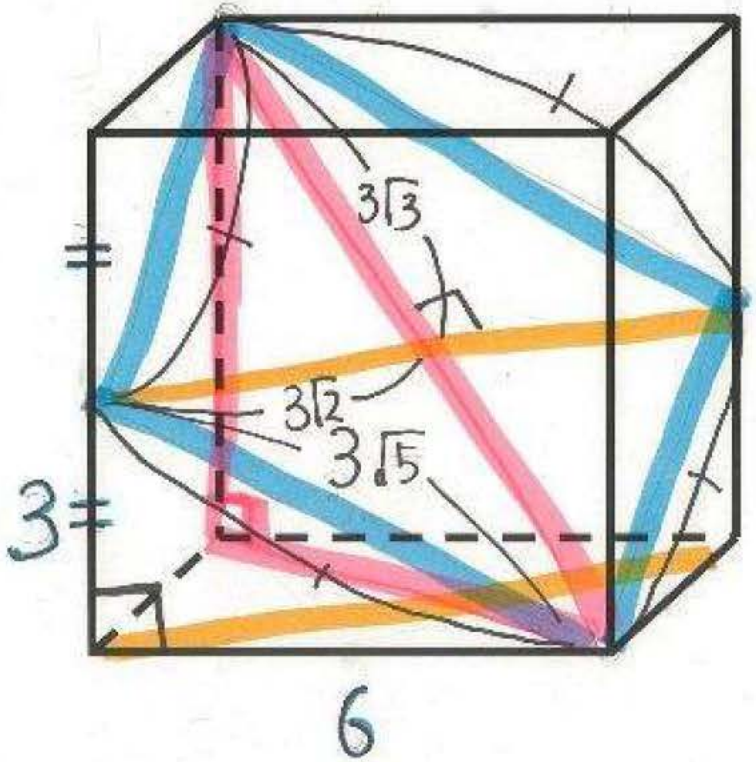
$6\sqrt{2}$cm × $6\sqrt{3}$cm = $36\sqrt{6}$cm^2

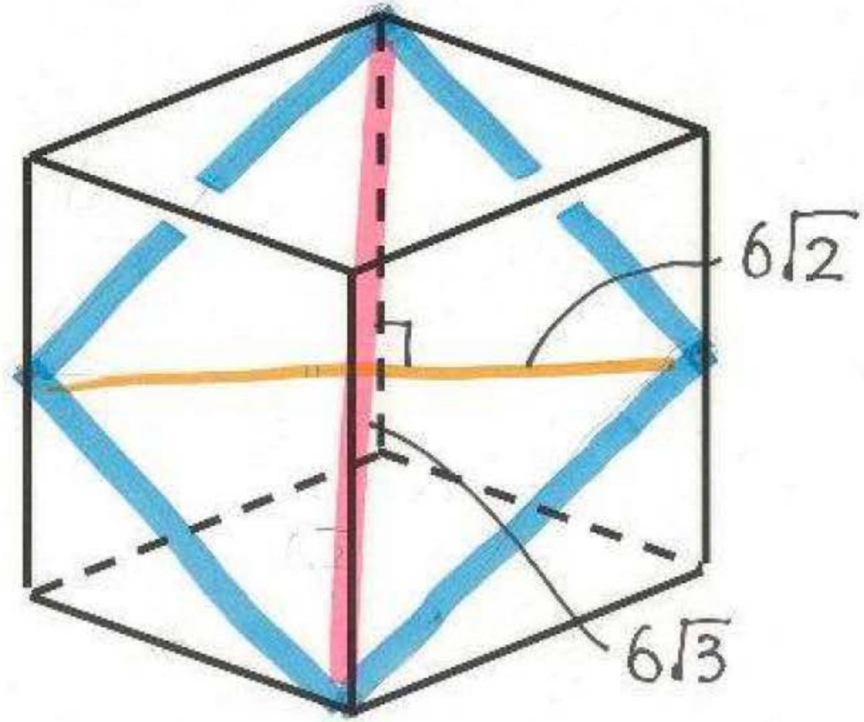
ABCD-EFGHを4点AIGJを通るように切断したときの点Eを含む図形の体積

6cm × 6cm × $\frac{0\text{cm}+3\text{cm}+3\text{cm}+6\text{cm}}{4}$ = 108cm

切り口：ひし形

担当：





【気付いたことなど】

周りの長さ

$l = 3\sqrt{5} \times 4$

$= 12\sqrt{5}$ cm

ひし形の面積

$S = 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{3} \times \frac{1}{2} \times 4$

$= 18\sqrt{6}$

$18\sqrt{6}$ cm^2

ひし形になるワケ

☆対角線の長さが違うから!

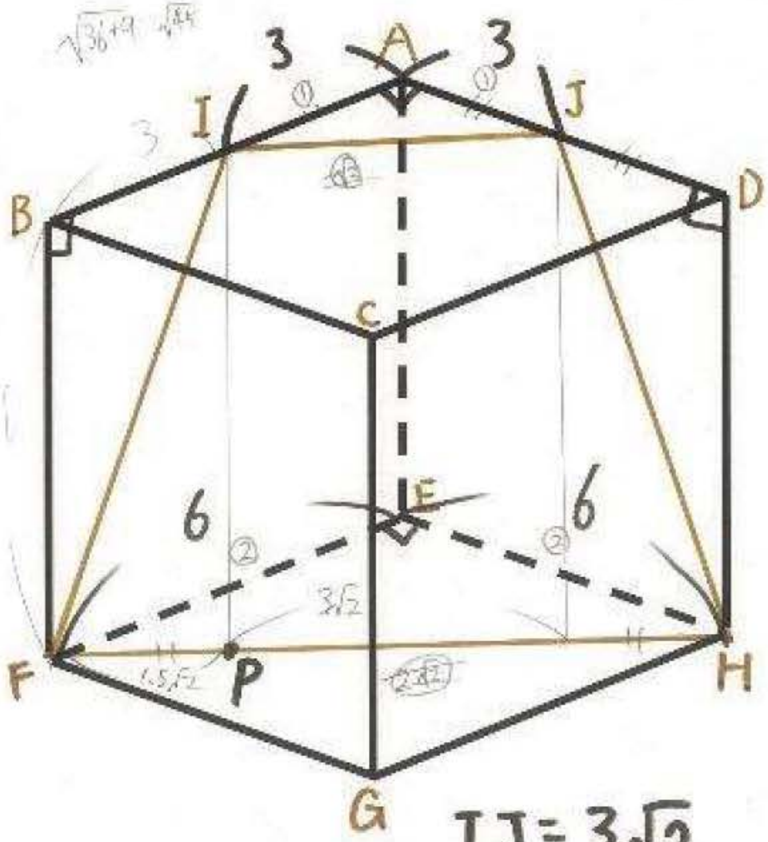
切り口：台形(等脚台形)

担当：

【気付いたことなど】

・$IF = JH = 3\sqrt{5}$　・$IJ /\!/ FH$

・$IJ : FH = 1 : 2$



$IJ = 3\sqrt{2}$

$FH = 6\sqrt{2}$

$18 - \frac{18}{4} = \frac{72-18}{4}$

$= \sqrt{\frac{54}{4}}$

$IP = \frac{3\sqrt{6}}{2}$

〈面積〉

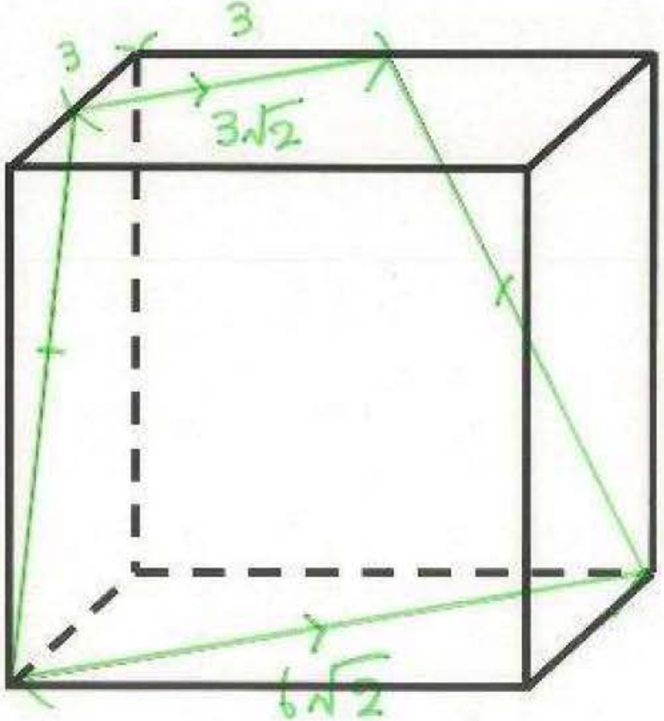
$(3\sqrt{2} + 6\sqrt{2}) \times \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{6}}{2}$

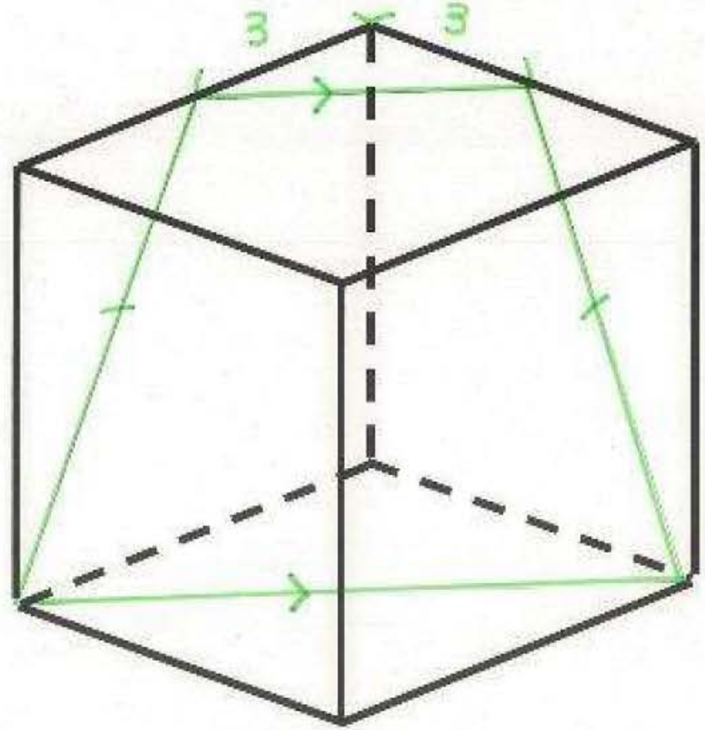
$= 9\sqrt{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{6}}{2}$

$= \frac{27\sqrt{3}}{2}$

切り口：等脚台形

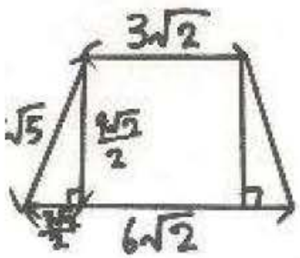
担当：





上底と下底が平行ならば
断面は台形になる。

【気付いたことなど】

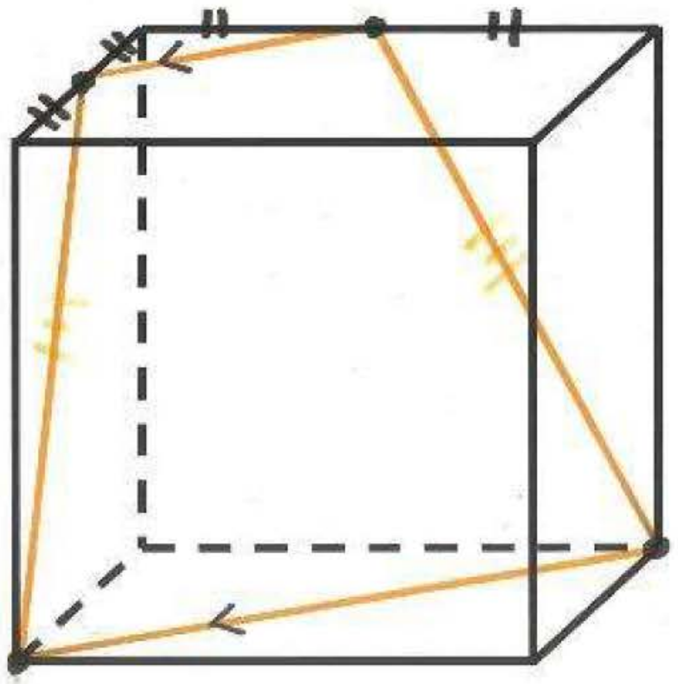


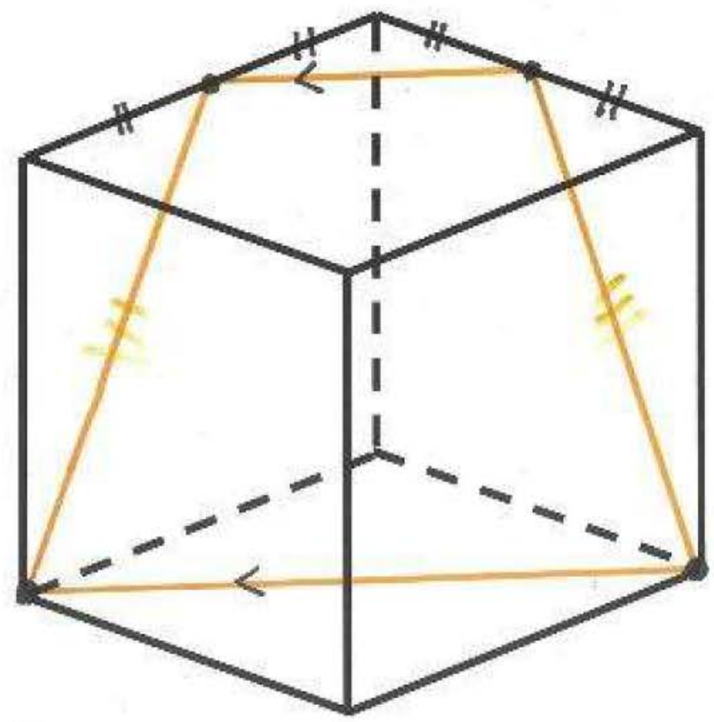
周長… $9\sqrt{2}+6\sqrt{5}$

面積… $\frac{81}{2}$

切り口：等脚台形

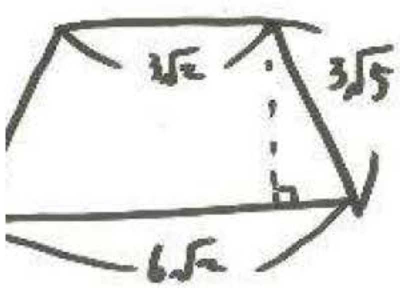
担当：





【気付いたことなど】

周りの長さ：$3\sqrt{2}+6\sqrt{2}+3\sqrt{5}\times 2 = 9\sqrt{2}+6\sqrt{5}$ cm



面積：$(3\sqrt{5})^2-\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$= \frac{81}{2}$　$\sqrt{\frac{81}{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$

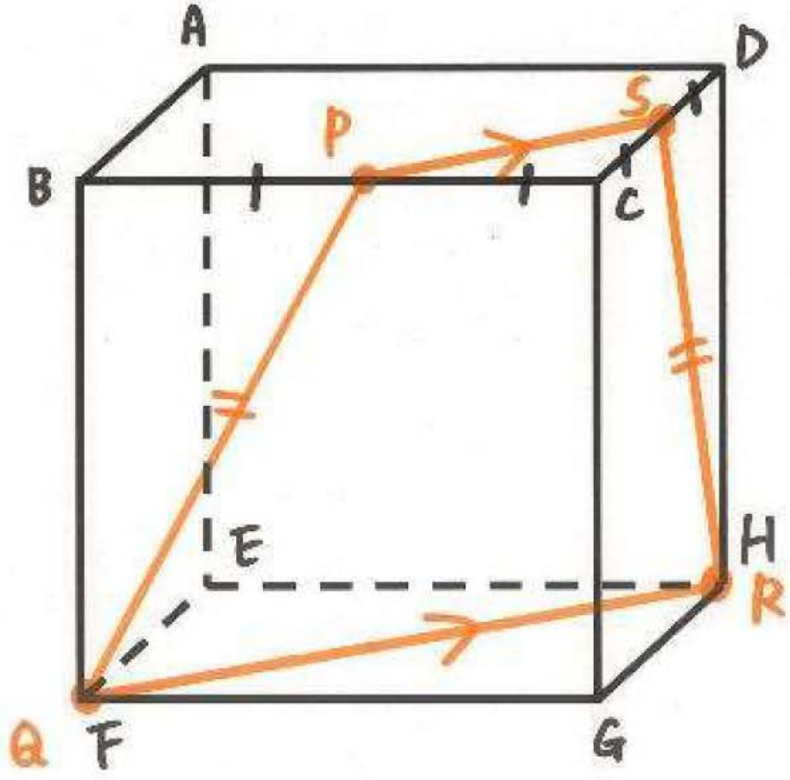
$(3\sqrt{2}+6\sqrt{2})\times\frac{9\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}$

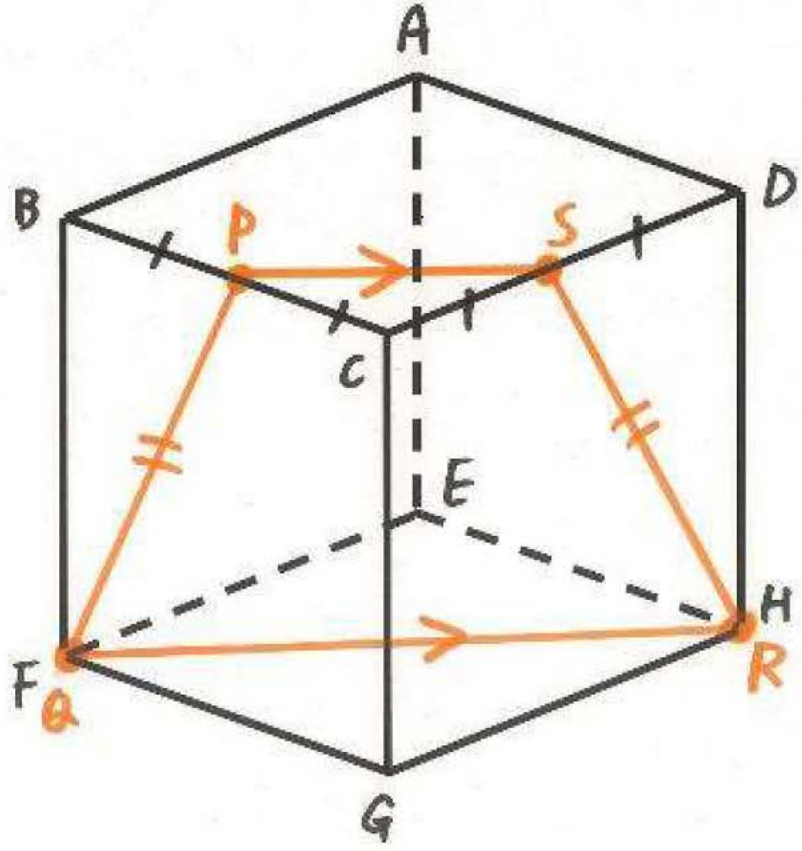
$= 9\sqrt{2}\times\frac{9\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}$

$= \frac{162}{4} = \frac{81}{2}$ cm^2

切り口： 等脚台形

担当：





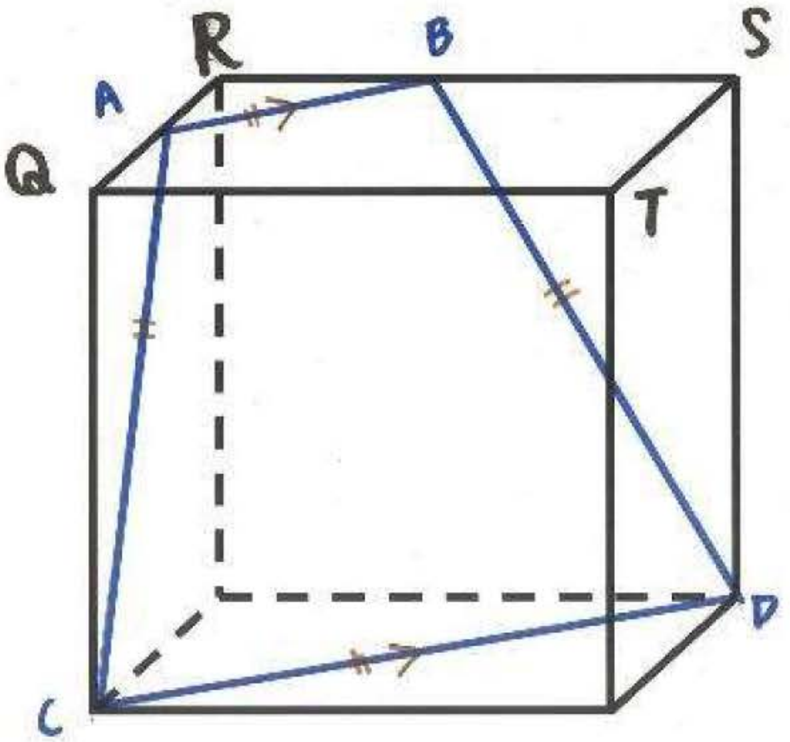
【気付いたことなど】

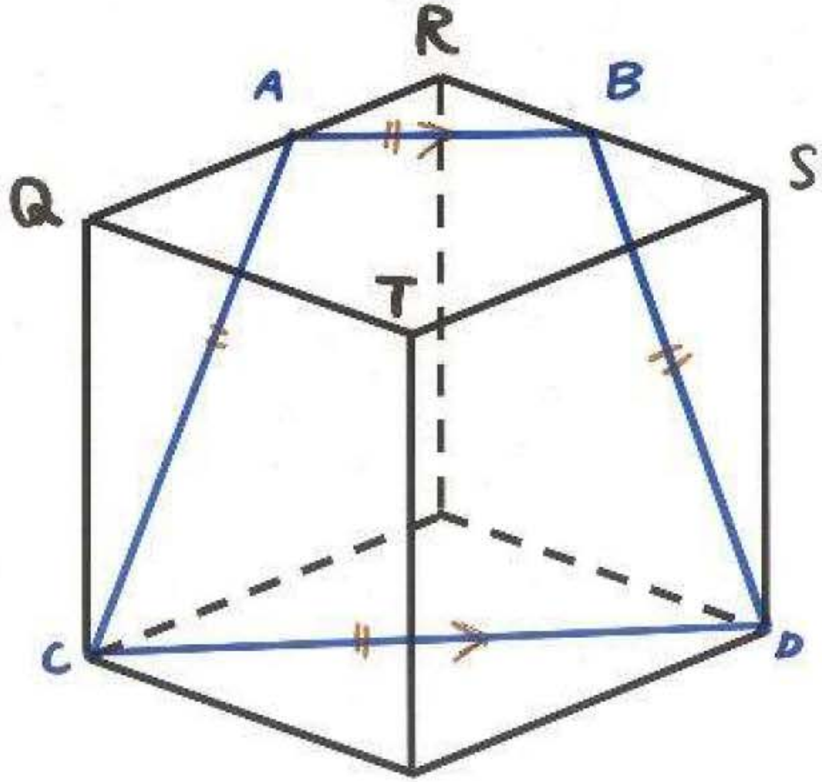
PSは平行移動させれば中点でなくても等脚台形になると言える。

↳ 等脚台形は PS // QR , PQ = SR になれば良い

例）点PがABの中点上にあるとき、点SはADの中点上にある

切り口：等脚台形　　　　担当：





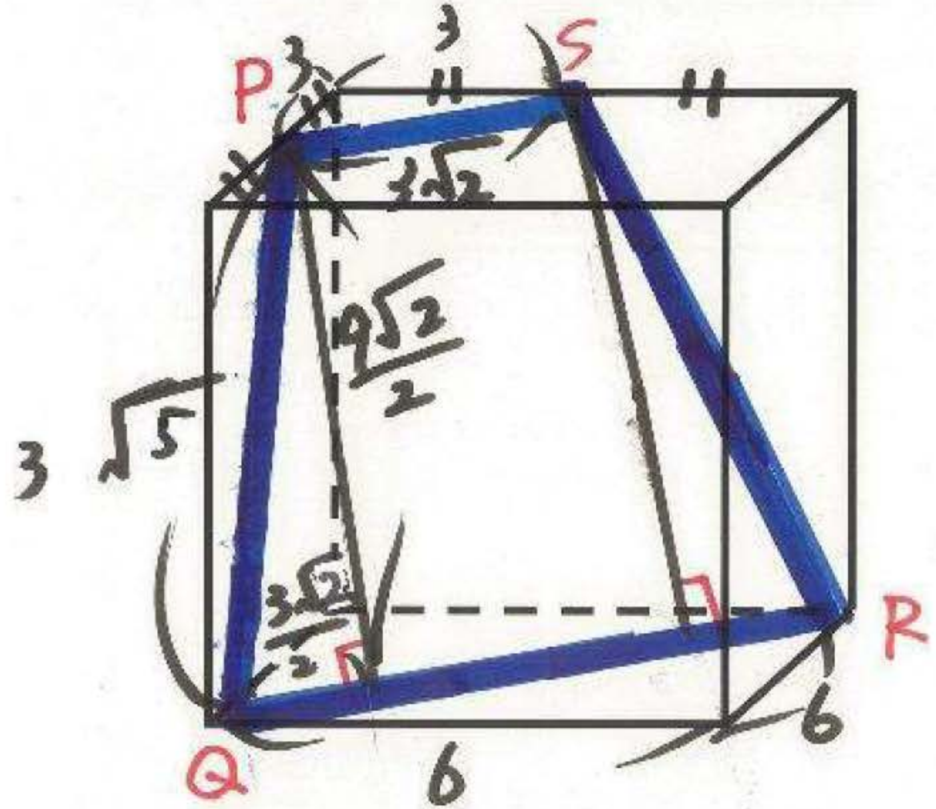
【気付いたことなど】

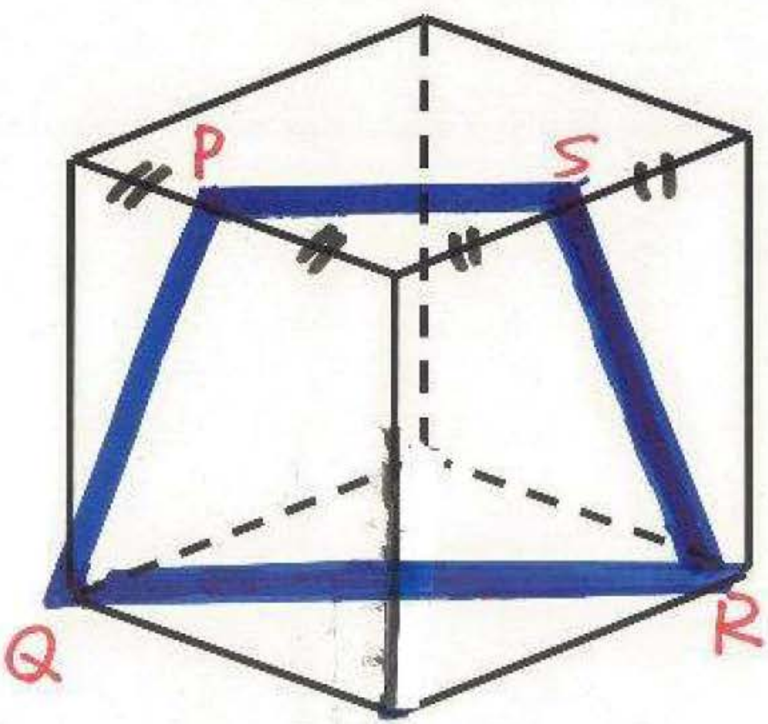
- AB//CD
- A は QR の中点、B は RS の中点

等脚台形になれる

切り口： 等脚台形

担当：





【気付いたことなど】

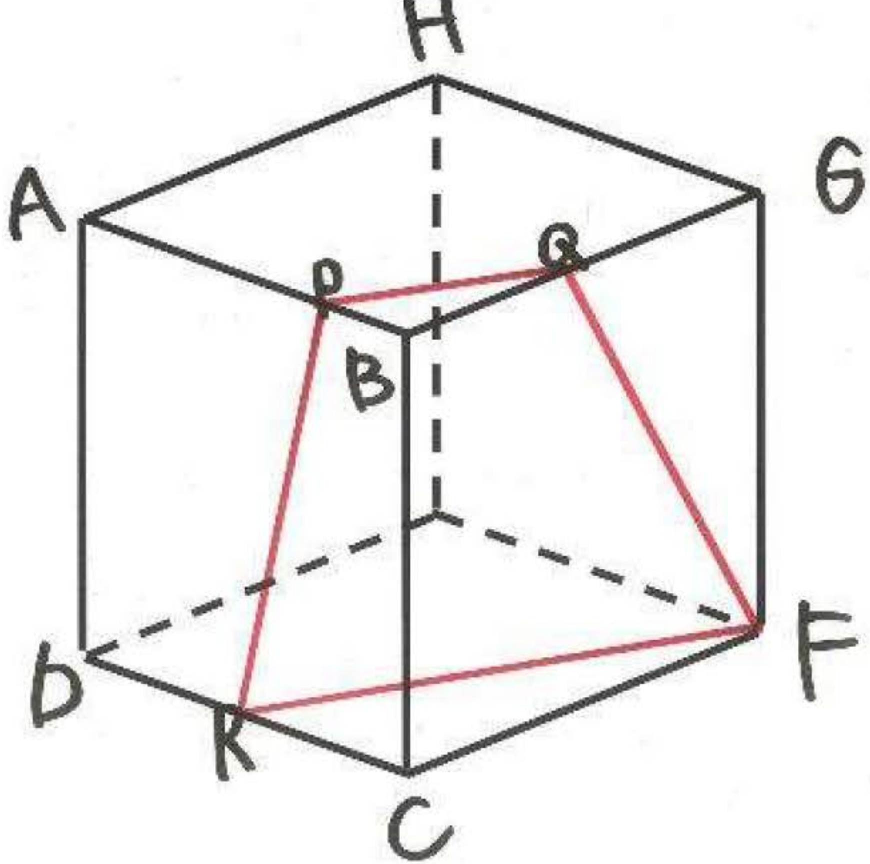
・$QR = 6\sqrt{2}$　$PS = 3\sqrt{2}$　$PQ = 3\sqrt{5}$

高さ $= 6\sqrt{2} - 3\sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$　PQと三平方で… $\frac{9\sqrt{2}}{2}$

切り口の面積：$\frac{81}{2}$

切り口： ただの台形

担当：



【気付いたことなど】

BR：BQ ＝ RC：CF …①

$\angle ABG = \angle DCF = 90^\circ$ …②

①②より、2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので、

$\triangle BPQ \sim \triangle CRF$ …③

③より PQ // RF なので四角形 PQRF は台形といえる。

BP：BQ ＝ RC：CF ＝ 1：1 のとき、等脚台形。

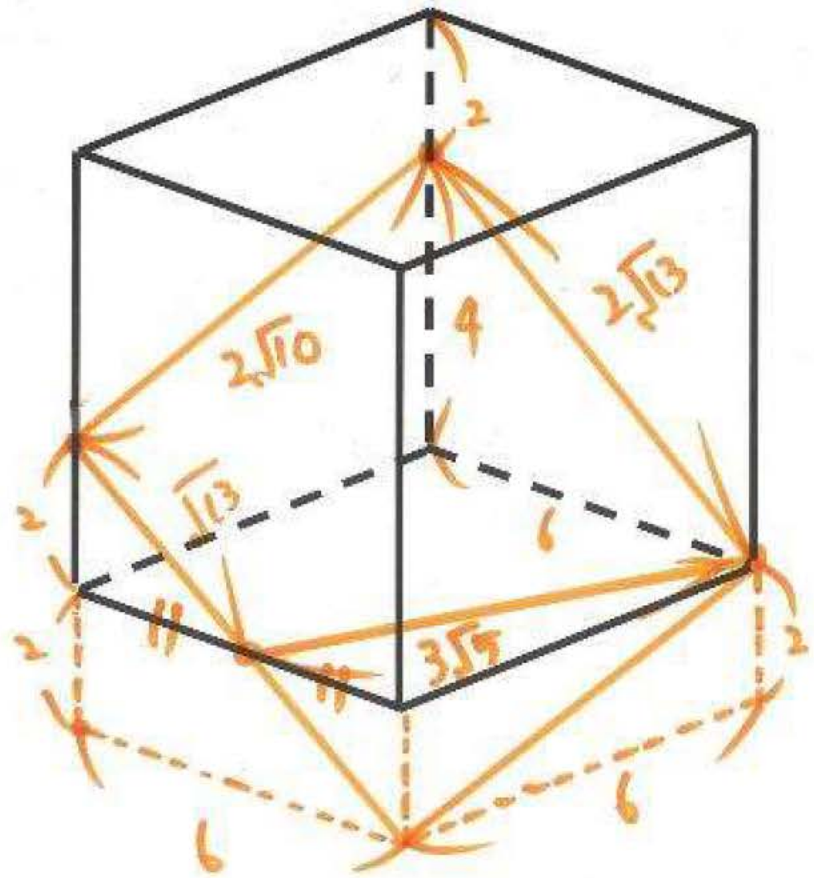
BP ＝ RC （BQ ＝ CF）だと長方形になる。

等脚でない

切り口： 台形

担当：

【気付いたことなど】



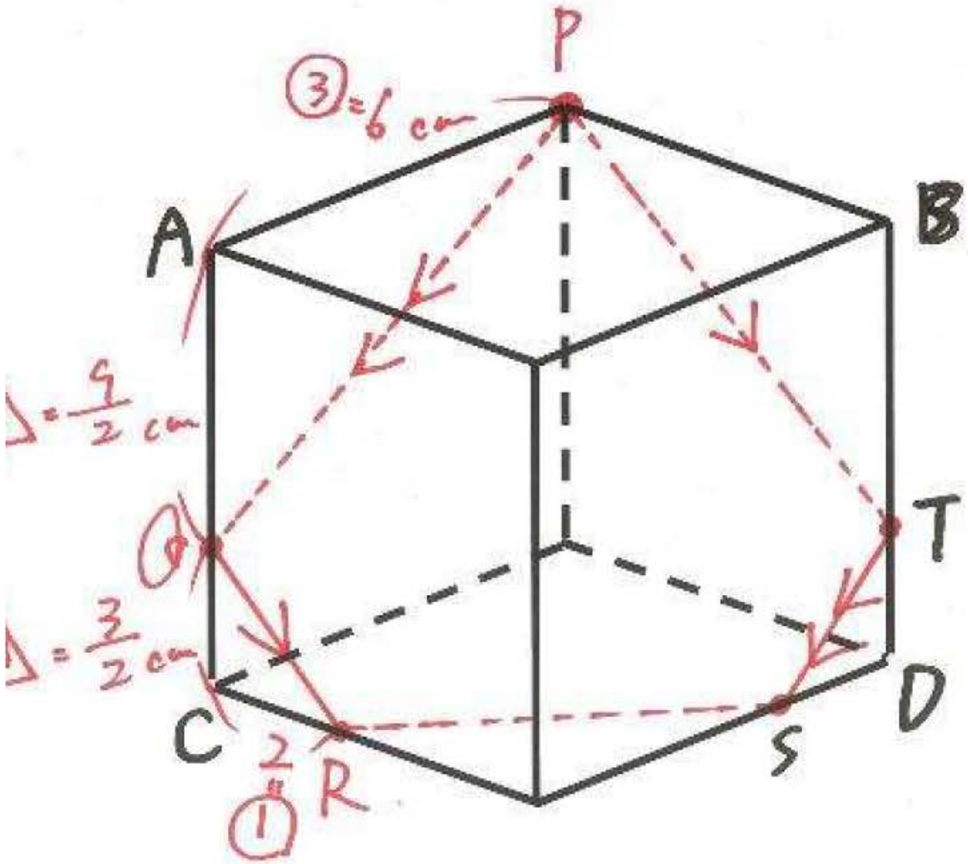
〈周の長さ〉

$$\sqrt{13}+2\sqrt{13}+2\sqrt{10}+3\sqrt{5}$$

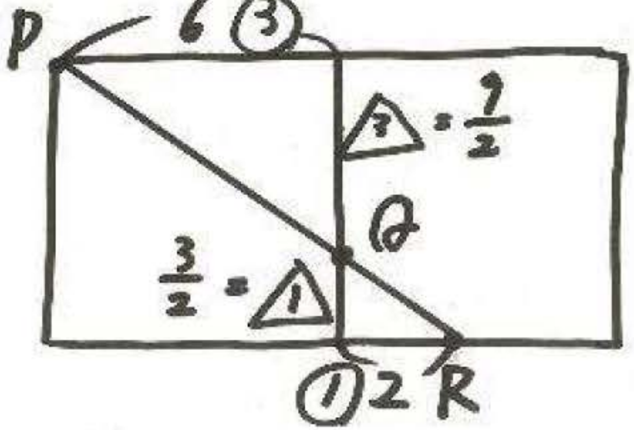
$$=3\sqrt{15}+2\sqrt{10}+3\sqrt{5}$$

切り口： 五角形

担当：



【気付いたことなど】



△PAQ ∽ △PBT より

QR // PT

△QCR ∽ △TDS より

PQ // TS