「論理の順序」を長い眼・広い眼で育てる学習指導

藤原　大樹（お茶の水女子大学附属中学校）

１．昨年の公開授業の実際

（１）授業のねらい

根拠を基にして，ある事柄が「正しい」「正しくない」ということを明確に説明できるようにすることは，新たな価値を生み出す豊かな創造性の育成の観点から，算数・数学科に期待されている重要な資質・能力である（清水，2021）．そこで，本時では，「証明は論理的な知識の体系をつくっていくために必要な営みである」という理解の一環で，局所的体系化の「命題を系列化する活動」（礒田，1987）に向けて，生徒が命題の証明の順序に気付く展開を試みた．誤解を恐れずに表現すると，何が前提で何がいえるのかといった「論理の順序」に迫る図形の授業である．それにより，命題を見いだし証明する過程で

・この事柄は根拠として使えるか.

・使えない場合，何を先に証明すべきか.

・他にはどんな事柄を根拠に使えばよいか.

などと，正しい証明に向けて問い続ける態度や演繹的に推論する力が育成されると考えている.

本時は，二等辺三角形の性質及び条件，直角三角形の合同条件を学習した後，四角形についての学習の第 1 時である．本時の目標は「三角形の合同条件などを基にして平行四辺形の基本的な性質を論理的に確かめたり，証明を読んで新たな性質を見いだしたりすることができる」とした.

（２）授業の実際

本時の序盤では，小 4 の学習を振り返り，操作を基にして認めてきた平行四辺形の性質を思い出し，顕在化していった．それは，「❶ 2 組の対辺はそれぞれ等しい」「❷ 2 組の対角はそれぞれ等しい」「❸ 対角線はそれぞれの中点で交わる」の 3 つである．これを踏まえ，「～が成り立てばそれを根拠に…がいえる」という性質の証明の順序を扱う. 特に, 図における三角形の有無から, 特に❶と❸の証明の順序に問題を焦点化していった.

全体では❶の証明を先に考える反応が多いと予想したが，❸の証明を先に考えたいという反応がある程度おり, それを認めて進めた. 生徒に訊いてみると, 授業者の想定よりも「ただ何となく」という反応が多く，見通しをあまりもたない中での試行錯誤として取り組んでいるという印象であった.

本時の中盤から終盤にかけて, ❶の証明として, 1 本の対角線を引いて考えた反応をまず取り上げた．その後, 2 本の対角線を引いて❶や❸の証明を考えた反応を取り上げ，❸の証明ができなかった事実を共有し，❸よりも❶を先に証明すべきであることに生徒が気付けるように，ねらい通りに試みた. しかしながら, 本時の山場であるこの場面は授業の最後 10 分間ほどになり, 時間をかけて多くの生徒の納得を得るには至らなかった感がある.

その原因としては, 第一に, 仮定から結論まで根拠を基に演繹的につないでいくのではなく，ただ仮定と結論を羅列しただけで証明として捉える生徒など，証明についての理解が不十分な生徒への個別指導が十分に行き届かなかったことが挙げられる. 飛び込み授業ではあったが, その点に何らかのアプローチができなかったか課題が残る.

第二に, 冒頭に「なぜ三角形についての考察の後に, これから四角形, 特に平行四辺形について考察していくのか」について話題にしたが, 想定よりも時間がかかり過ぎた. 本時では, 算数の学習を踏まえて四角形の包摂関係をやや意識しながら，様々な四角形の貼り物を用いて教師と生徒とで緻密に対話しながら学習に入っていった．研究授業の特性上,「本時のねらいにあまり関わらない部分については割愛すべき」との意見を参加者から受けたが，対象生徒にとっては領域を通した長い学びの中の 1 時間にすぎず，学ぶ意義を感得させるために必要な動機付けの時間なのではないかという思いも授業者にはあり，正直悩ましい.

第三には, 本時のねらいであった, 命題の証明の順序に気付く展開が，図形の証明を学習し始めて間もない対象生徒にとって時期尚早であったという点である．このような声を参加者から受けたが, 同時に,「あれが証明できていないとこれが証明できない」といったことに論理的に気付くことのできる生徒を増やしていくことは，わが国が長い間

かけて学習指導を継続してきた図形の論証においてとても重要な意味をもつという意見も受け，一定の共感を得られた．対象生徒は論理の順序について考える学習活動に不慣れなに思えたが，そもそも本時に先立つ学習から，上記のことに生徒が気付く場面はあるようにも思われる．例えば，二等辺三角形の 2 つの底角が等しいことを証明するために，2 つ組み合わせて平行四辺形をつくって考える反応は，「まだ証明できない」と扱われる．また，ばらつきのある統計データから一次関数を用いて未知の状況を予測する学習では，変化の割合をどう仮定したら予測結果がどうなる，という「原因と結果」（中室・津川，2017）をセットにした見方が不可欠である．不確定な事象を対象とした分析・予測においても，「論理の順序」は重要である．

２．授業改善の視点

授業者の思いとしては，本時の主張はそのまま定めたまま，領域指導及び単元指導をよりよく改善していくことで，少しでも本時のねらいに迫りたい．そこで，本時の授業改善の視点を，領域指導及び単元指導を含む視点から提案したい．

まず，授業がうまくいかなかった第一の原因に関しては，前単元からの証明の必要性と意味の学習指導によるものと推測される．証明のいわゆるかき方指導を学校や塾等で強く受けている生徒がいるとすれば，「ノートに証明らしいことをかける生徒」は多いかもしれない．しかしながら，「何ができれば証明できたことになるのか」については理解が浅い生徒も多いのではないか．つまり，「緻密にかかなくても，論理の順序が正しければ正しく証明できている」「口頭で言えたり流れのわかる図や箇条書きで視覚的にまとめたりした証明でもよい（こともある）」という知的な納得感のある学習も実現されることが望まれる．

第二には，平行四辺形についての学習に向けた動機付けを，三角形についての前時のまとめのタイミングで済ませておくことが考えられる．とはいえ，これは研究授業の対象学級の授業担当者に，研究授業の授業者各々から個別に対応をお願いしておくことは現実的に難しいかもしれない．

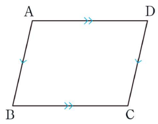
最後に第三についてであるが，今後の大きな課題であると考える．礒田（1987）の実践のような壮大で高尚な学習指導は，ほとんどの中学校の生徒の実態を踏まえると正直難しい．しかしながら，「命題の系列化」（礒田，1987）を含む「論理の順序」に向けた精神は，すべての学校で大切にして欲しい．繰り返しになるが，中学校の数と式，図形おける論証のみならず，算数科での学習や関数及びデータの活用における分析・予測などにおいても，何が前提となっていて，その結果何がいえるのか（いえないのか），といった「論理の順序」を考察することは，新たな価値の創造に向けた教科等横断的な資質・能力である．これからも学校種を越えた「長い眼」で，また領域を越えた「広い眼」で，この「論理の順序」について生徒が学習しやすい場面を収集し，強調していくことが今後の課題の 1 つであると考える。

３．本時の展開

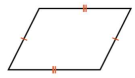
主な学習活動と予想される生徒の反応	指導上の留意点
１．考察の対象を平行四辺形に焦点化する．（5 分） T :「これまでは三角形について学習してきました．これからは頂点を増やして四角形，その代表として，平行四辺形で考えましょう．」 T :「いろいろな四角形に関連しそうな，この平行四辺形について学んでいきましょう．」	・中 2 の図形領域の学習の対象が，単一の図形の性質（三角形の内角の和など），複数の図形の関係（三角形の合同条件など）であったことに触れる． ・用語「対辺」「対角」を紹介し，既習の用語「対角線」についても確認する．
２．証明すべき事柄を見いだす．（10 分） T :「平行四辺形の定義は，『2 組の対辺がそれぞれ平行	・平行四辺形の定義を板書する．ここでは図のかき方にはこだわらない．

な四角形』です．ノートに書きましょう．」
T :「では，ノートに平行四辺形をかいてみましょう．隣の人と見比べてみましょう．同じかな？」
S :「私のはペチャンコで，君のは太いね．」
T :「平行四辺形の辺や角などについてどんなことがいえましたか？　隣の人と 1 分間話しみてください．的確な表現で言えるとよいですね．」
T :「では，発表してください．」
S :「対辺の長さが等しい．」
T :「例えば，どことどこですか．」
S :「そことそこ．AB＝CD，AD＝BC．」
S :「いいと思います．」　S :「それぞれ，が必要だ．」
T :「他はどうですか．」
S :「2 組の対角がそれぞれ等しい．」
S :「他にはありますか．もうないかな…？」
S :「対角線がそれぞれの中点で交わる．」
T :「そうでしたよね．では，これらが正しいことを証明してみましょう．」
T :「どれから証明しましょうか．」
S :「❶から始めましょう．一番知られているから．」
S :「僕は，❸からやってみたいな．三角形に分かれているから，証明が簡単そう．」
S :「私は，❷からやってみたい．」
T :「どれが最も多いでしょうか．❶かな？」

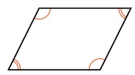
・かいた平行四辺形の違いを意識させる．
・やりとりの中の必要な場面で，平行四辺形の頂点を記号化する．
・小 4 での学習を基に平行四辺形の性質を生徒から引き出し，板書する．



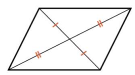
❶2 組の対辺がそれぞれ等しい．



❷2 組の対角がそれぞれ等しい．



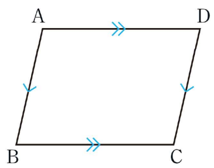
❸対角線がそれぞれの中点で交わる．



・生徒のすべての発言を否定せずに受け止める．同側内角の和の性質については，平行線の性質に基づくことに気づかせ，その後の議論の対象とはしない．
・黒板に「どれから証明する？」と書いて，問いを焦点化して強調する．
・「❸から証明したい」という生徒がいれば，着想を問いかけ，認めていく．❶が多く，❸は少ないと予想される．ここで❷を取り上げると授業全体の構造が複雑になるので，本時では一旦後回しにして単純化して進める．

３．平行四辺形の性質を証明する．（20 分）
T :「❶が多かったので，❶の証明を黒板では取り上げます．❸も後で聞きますね．証明を表現しやすいように，仮定と結論を表しましょう．」

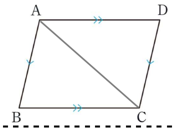
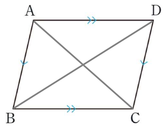
問題　四角形 ABCD で，
AB//DC，AD//BC ならば，
AB＝DC，AD＝BC である
ことを証明しよう！



T :「では証明を考えてみましょう．」
S : AC（あるいは BD）を引いて考える．
S : AC と BD の両方を引いて考える．
S : 補助線を引かずに考えている．

[証明]
AC を結ぶ．△ABC と△CDA において，
平行線の錯角より，∠BAC＝∠DCA　･･･①
∠BCA＝∠DAC　･･･②
また，AC は共通　･･･③
①，②，③より，1 組の辺とその両端の角が

・❶と❸の問題を左右分割して印刷したプリントを配り，生徒はノートに貼る．
・仮定と結論を板書で明示する．
・多くの生徒が証明の方針が立たない場合は，小集団や全体で，補助線を引く必要性についての気付きを促す機会を設ける．
・二等辺三角形の性質のノートや教科書を読み返し，複数の三角形をつくって考えるという証明の方針につなげる．
・❶の証明の過程を読み取ることで，❷の証明につなげることができる．❷の証明は全員で一斉に取り組むのではなく，進んだ生徒に個別に考えさせる程度に止める．
・2 つの対角線を結び，交点を O として△AOB≡△COD などを導こうとする生徒がいたときには，後でその結果を全体で取り上げるようにする．
・対角線を 1 本，あるいは 2 本引いた着想について問い，各方針を共有する．

それぞれ等しいので，△ABC≡△CDA 合同な図形の対応する辺はそれぞれ等しいので， AB＝DC，AD＝BC T：「ではまず，対角線を 1 本引いて証明したものを発表してもらいます.」  	・時間不足の場合は[証明]が書かれたプリント（下点線部は空欄）を配付し，ノートに貼るように指示する.
4．他の方法や❸の証明について考える.（10 分） T：「他には，対角線を 2 本引いた方法で❶の証明を粘っていた人がいましたね．どうでしたか？」 S：「AC と BD の 2 本を引いて，△AOB≡△COD を証明しようとしましたが，できませんでした.」  S：「❶が根拠に使えたら証明できたのですが….」 T：「❸を先にやっていた人がいましたね.」 S：「駄目でした．❶がいえないと❸はいえません.」 T：「なるほど，事柄の証明には何が基になって何がいえるか，という『順序』があるんですね．でも，勇気ある素晴らしい探究でした. みんなにとっても学びになりましたね．ありがとう.」 T：「❷も証明できたという人はいますか？」 S：「できました．❶の証明とほとんど同じです.」 T：「どういうことでしょうか．みんな，わかる？」 S：「❶の証明の合同まで同じで，その後に角が等しいことを言えば，❷の証明になります.」 S：「本当だ…．ほぼ同じ.」 S：「❶よりも❷を先に証明してもできたんだね.」 T：「教科書ではどう書かれてあるかな.」 T：「教科書に書いている以上のことが学べたね.」	・生徒の論点の変更に留意する. ・対角線を 2 本引いた反応を取り上げる. ・❸を証明する生徒がいなかった場合，この 2 本の方法を振り返って，もし先に❸を証明しようとしても証明できなかったということに気付かせる. ・他の生徒と異なる方法でアプローチを試みた果敢な姿勢に，生徒全員で拍手を送りたい. ・❷について時間不足ならば次時に回す. ・まだ❷の証明に取り組んでいない生徒も少しは考えられるように，短時間でも考えたり話し合ったりする機会を設ける. ・教科書の該当ページと結び付け，家庭で復習するときの参考にさせる.
5．学習の結果と方法を振り返る.（5 分） T：「今日は何が新しかったかな？」 S：「平行四辺形の性質を証明しました.」 S：「性質のどれを先に証明すべきかを考えました.」 T：「バラバラのものをわかりやすく整理することを『体系化』といいます. バラバラの知識の順序を考える『体系化』によって，それらが 1 本の樹のように整理されます．数学以外でも，物事を整理するときに大切な営みです.」	・板書を一望しながら学習の成果や過程を振り返る機会を設け，まとめにつなげる. ・「何が根拠になってこの定理は成り立つのか」を考えながら証明について学び続けることを生徒に勧める. ・次時に向けて，❸の証明や❷の証明に関心をもたせる.

引用・参考文献

磯田正美(1987). 体系化の立場から見た中 2 の図形指導．日本数学教育学会誌第 69 巻第 11 号. 25-32.

中室牧子・津川友介(2017). 「原因と結果」の経済学．ダイアモンド社.

清水静海(2021). 算数の本質に迫る授業づくり．新しい算数研究 No.603. 4 月号. 4-7.