

公開授業 第2学年 数学科学習指導案

【題材名】 直角三角形の合同条件

【主な数学的活動】 イ 数学の事象から問題を見だし解決する活動

【テーマ】 具体的な場面ででの活用に向けた「直角三角形の合同条件」の習得

直角三角形の合同条件を具体的な場面で活用できるようにするために、その習得の場面において、証明の目的と方法に焦点を当てた授業を試みる。

授業者 お茶の水女子大学附属中学校 藤原 大樹
授業学級 中野区立緑野中学校 2年C組

1. 本時の目標

直角三角形の合同条件の必要性を理解し、その証明について、2つの三角形をくっつけて二等辺三角形をつくらせたりその性質を用いたりして、論理的に考察することができる。

2. 本時の位置づけ

本時は一般の三角形の合同条件、二等辺三角形の性質と条件を学習した後に位置づける。

3. 本時の主張

一般に、「証明がわからない」という生徒は多い。生徒の「証明がわからない」という理由には次の2つがあるといわれる（杉山, 2010）。

- ・証明の目的がわからない。
- ・証明の方法がわからない。

したがって、証明の授業においては、証明の目的と方法のそれぞれに手立てが必要である。

授業や単元はその本質に迫る問いに基づいてデザインすることで、生徒は「なぜ学ぶのか」がよくわかるようになり、生徒が探究的に学びをつくらせていくことにつながる（藤原, 2018）。証明の授業においては、なぜその証明をする必要があるのかという視点から授業や単元を構想していくことが、上記の「証明の目的がわからない」ことの解消の一助となる。

例えば、授業者の考える本単元の問い、及び本時の問いは、次のとおりである。

本単元「三角形と四角形」の問い

いろいろな三角形や四角形では
どんな性質が成り立つのか？

本時「直角三角形の
合同条件」の問い

三角形の1つの角が直角になると
特別な合同条件はできるのか？

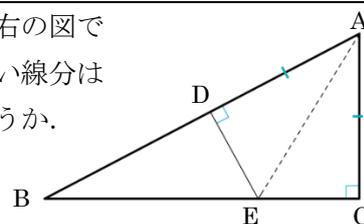
前単元では、一般の三角形について成り立つ事柄について考察してきた。続く本単元では、三角形の辺の長さを特殊化したり（二等辺三角形）、角の大きさを特殊化したり（直角三角形）する中で、成り立つ事柄を見だし論理的に確かめる探究的な展開を目指したい。

この問いのもと、生徒が必要を感じながら直角三角形の合同条件と出会い、自ら学び深められるように、次の手立てを試みる。

(1) 問題発見の手立て

本時では次の導入問題（相馬（1995）を改題）を取り上げる。「 $DE=CE$ である」という反応が予想されるが、その証明には直角三角形の合同条件が根拠として必要である。既知である一般の三角形の合同条件の限界を感じさせ、新たな知識の必要性につなげたい。

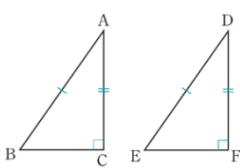
導入問題 右の図で
長さが等しい線分は
あるでしょうか。



つまり本時で何が問題なのか、なぜ問題なのかに気付かせ、一連の活動を動機付けする。

なお、ここでのはじめの漠たる問題は上記の「三角形の1つの角が直角になると特別な合同条件ができるのか？」である。この問いを、生徒とのやりとりを通じて次の主問題に置き換え、焦点化して全員で共有する。

主問題 右の $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ で、
 $\angle ACB = \angle DFE = 90^\circ$,
 $AB = DE$, $AC = DF$ である
 とき、 $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ であることを証明しなさい。



(2) 方法の見直しをもたせる手立て

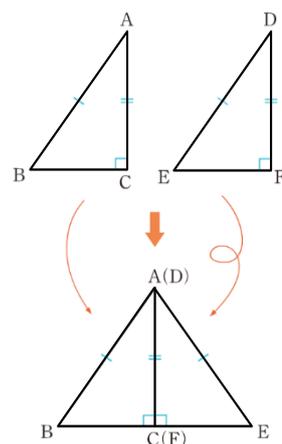
上記の主問題の証明で有効な方法は「2つの図形をくっつけて既知の図形（二等辺三角形）をつくり、その性質を用いること」である。自然と出やすい発想ではないかもしれない。その着想が得られない生徒には、まず小5の「平行四辺形の面積」や小5・中2の「多角形の角の和」、小6の「円の面積」など、過去の学習で経験した、図形をくっつけたり分けたりする経験が想起されるように助言する。

それでもその着想が得られない場合には、

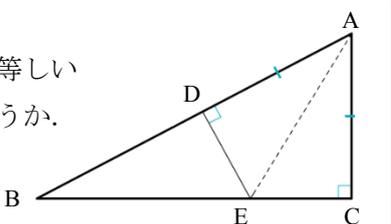
冒頭の導入問題や他の生徒が行っている「くっつける」という行為から「どこをくっつけると既知の図形で表せるか」という発想につなげたい。

(3) 方法の振り返りを促す手立て

上記の有効な方法を学んでも、“やりっぱなし”では定着が難しい。そこで、上記の有効な方法を自覚化できるように、問いのプロセスや有効な方法を板書して残してノートに記録させたり、「どんな方法が有効でしたか」などと問いかけて考えさせたり、家庭学習のために教科書の内容と関連付けさせたり、過去に経験した類似の行為と重ね合わせさせたりする。それらにより、方法知を抽象化して自身の中に残し、活用可能、検索可能なものとして習得させたい。図形を論理的に考察し表現する能力（文部科学省、2017）を養うことにつながると考える。



4. 本時の展開

主な学習活動と予想される生徒の反応	指導上の留意点
<p>1. 直角三角形の合同条件について考える必要性を見いだす。(5分)</p> <p>導入問題</p> <p>右の図で長さが等しい線分はあるでしょうか。</p>  <p>T:「近くの人同士で少し話し合ってみてください。」 S:「AD=BDです。」 S:「測ったら違ったよ。」 S:「DE=CEです。」 S:「計っても等しそう。」 T:「本当にそう？ その理由はどうですか？」 S:「$\triangle ADE \equiv \triangle ACE$ であるといえれば $DE=CE$ といえます。」</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・黒板の$\triangle ABC$に点D, Eを取り、仮定を確認しながら導入問題を理解させる。線分CDを引いても$DE=CE$を証明できるが、直角三角形の合同条件に焦点を当てるため、線分CDを意図的に避け、線分AEを授業者が引く。 ・結果（命題の結論）を予想させ、共有する。他の図も挙げて生徒を揺さぶる。 ・予想した結果をコンパスで確かめる。 ・「$DE=CE$」という反応と表情を確認し、その理由の考察に生徒の関心を移す。 ・結論から逆向きに証明を考えたこと（解析的な考え方）を褒める。

S:「でも、 $\triangle ADE$ と $\triangle ACE$ では、三角形の合同条件が当てはまらないので合同とはいえません。」
 T:「今わかっているのは、2組の辺と直角です。」
 S:「2組の辺とその間の角だったらよかったのに。」
 S:「そういえば直角三角形だ。」
 S:「先生、他の特別な合同条件ってあるんですか？」
 T:「特別な合同条件ですね。では今日は、特別な三角形である「直角三角形」に焦点を当て、合同条件について考えていきましょう。」

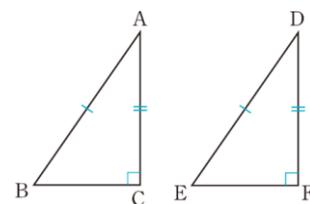
- 一般の三角形の合同条件の限界を感じさせる。
- 対象が特殊な三角形であることに着目させ、本時の目的を方向付け、焦点化する。
- つぶやきをできるだけ黒板に書き残す。
- 一般の三角形の合同条件よりも特殊な「直角三角形の合同条件」がありそうであるという雰囲気をつくる。
- 本時のテーマ「直角三角形の合同条件について考えよう」を板書する。

2. 問題を理解し、証明する方法を考える。(15分)

T:「では2つの直角三角形を $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ として次の問題を考えましょう。」
 T:「仮定と結論をはっきりさせておきましょう。」

- 導入問題の図から2つの三角形を取り出したり裏返したりする操作を強調する。
- 2つの三角形において直角、斜辺、他の一辺がそれぞれ等しいことを確認して図をかく。プリントをノートに貼らせる。

主問題 右の $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ で、
 $\angle ACB = \angle DFE = 90^\circ$, $AB = DE$, $AC = DF$ であるとき、 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ であることを証明しなさい。

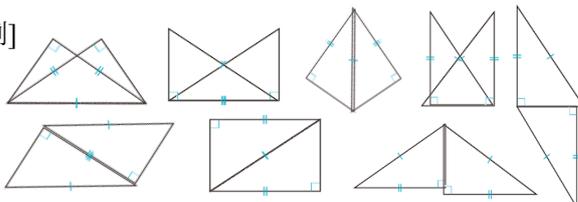


T:「まず証明に「 $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ において」と書きます。では、各自で考えてみてください。」
 S:2つの三角形を眺めたり何か書き込んだりしながら証明を考える。

- 机間指導で、2つの三角形をくっつける発想が得られない生徒を見つけ、過去の有効な方法を問いかけたり、導入問題の図に着目させたりする。

S:辺と辺をくっつけて図形をつくって考える。

[例]

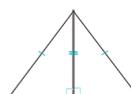


S:角と角を重ねて図形をつくって考える。

[例]



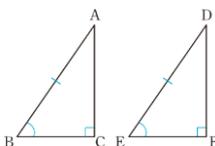
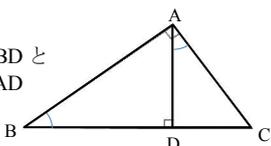
S:AC と DF をくっつけて二等辺三角形をつくって考える。



S:近くの生徒と相談し始める。

T:「では、近くの人同士で相談しながら進めましょう。質問や疑問をお互いに伝え合ひましょう。証明できたら声をかけてください。」

- 2つの図形をくっつける発想を机間指導で見つかれば、なぜそうしようと思ったか、何か性質が使えるかを問いかける。
- 新たな図形をつくってみると、間接証明等を用いれば証明できるものもある。しかし本時では、これらに深入りせず、「既知の図形をつくってその性質を用いる」ことに意図的に焦点を当てたい。
- 時機をみて、キーワード「くっつける」を全体で共有し、既知の図形をつくる考えに生徒自身で気付かせる。
- 生徒の気付きが出始めていることを確認した上で、生徒同士の会話を促す。一人での考察も認める。

<p>3. 全体で証明を共有する. (15分)</p> <p>T:「では証明を発表してください。」</p> <p>T:「これは『直角三角形の合同条件』といい、『①直角三角形の斜辺と他の1辺がそれぞれ等しい』です。」</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・本時では証明の形式を重視せず、生徒の発言を基に授業者が証明を板書する。 ・用語「斜辺」を紹介する。「斜辺」でない辺の長さが等しい場合は一般の三角形の合同条件が適用できることに触れる。
<p>4. 別の条件について考える. (10分)</p> <p>T「教科書を開けてください。先ほどみなさんが証明したのはこれですね。同じ方法です。」</p> <p>T「実は、もう1つあります。『②直角三角形の斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しい』があります。」</p> <p>T:「なぜこの2つの三角形は合同といえるのでしょうか。みなさんの知っている三角形の合同条件は当てはまりますか？」</p>  <p>S:「2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいです。」</p> <p>T:「そうですね。…ということは、この条件は必要ないということなのではないでしょうか？」</p> <p>S:「よく使われるんじゃないでしょうか。」</p> <p>S:「$\angle BAC = 180^\circ - \angle ABC - 90^\circ$などの記述が証明に必要なないので、あると便利だと思います。」</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・家庭で復習しやすいように、教科書の記述と本時の学習内容の関連付けを図る。 ・直角三角形の合同条件①の下に②を板書するが、時間の関係で②に深入りしない。 ・①と②とで「他の1辺」と「1つの鋭角」のみが異なることに触れて印象づける。 ・時間が許せば、「直角三角形の1辺と1つの鋭角がそれぞれ等しい」が合同条件にならない理由（反例）について少し考えさせる。時間がなければ、進んだ生徒向けに一部紹介するか、扱わない。 <p>[反例]</p> 
<p>5. 学習の結果と方法を振り返る. (5分)</p> <p>T:「今日学習したことで何が新しかったですか。」</p> <p>S:「直角三角形の合同条件です。」</p> <p>S:「一般の三角形の合同条件と似ているけどちょっと違いました。」</p> <p>T:「どんな方法が今日は新しいと感じましたか。」</p> <p>S:「図形と図形をくっつける考えです。」</p> <p>S:「それで、二等辺三角形の性質を使いました。」</p> <p>T:「似たことを今までやったことはありますか。」</p> <p>S:「小学校の算数でも三角形や台形の面積の求め方などの授業でやった気がします。」</p> <p>T:「次回からの授業では、直角三角形の合同条件も、『くっつけて知っている図形をつくる』という考え方も、上手に使ってくださいね。」</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・学習の結果を振り返らせることにより、直角三角形の合同条件の意味や必要性の自覚化を促す。 ・学習の方法を振り返らせることにより、複数の図形の辺の長さが等しいことに着目してくっつけて既知の図形をつくるという方法の自覚化を促す。 ・過去の学習と関連付けて重要な方法を強調し板書する。本時では個人の振り返りよりも集団の振り返りを重視する。 ・最後に導入問題に戻り、直角三角形の合同条件を関連付け、学ぶ意義につなげる。

【参考・引用文献】

- ・藤原大樹（2018）『「単元を貫く数学的活動」でつくる中学校数学の新授業プラン』，明治図書。
- ・文部科学省（2017）「中学校学習指導要領解説数学編」。
- ・相馬一彦（1995）『「予想」を取り入れた数学授業の改善』，明治図書，pp.94-97。
- ・杉山吉茂（2010）『復刻 公理的方法に基づく算数・数学の学習指導』，東洋館出版社，p.106。