

モデリングと統計的探究のサイクルにもとづく数学科授業研究の諸相

Each Aspect of Mathematics Lesson Study in Lower Secondary School
Based on Modelling Cycle and PPDAC Cycle

藤原大樹
お茶の水女子大学附属中学校

要 約

本研究では、モデリング・サイクルと統計的探究プロセスに基づき、統計的な問題解決に関する生徒主体のサイクル進展と方法知の自覚化を目指した中学校数学科の研究授業を計画、実施し、生徒の活動の様相や研究協議会での主な論点を報告することを目的とする。留意点を4つ設けて、「小指ギャップ」の授業を2時間行い、事後調査、研究協議会を実施した。その結果、サイクルの各相を生徒が主体的に進展させた。一方で、生徒にとっての問題がモデリングと統計の両観点から2つ併存したことが指摘された。また、方法知の自覚化には、単一の指導で効果が見込まれるものとそうでないものがあった。

キーワード：モデリング・サイクル、統計的探究プロセス、方法知

1. 研究の動機、目的、方法

これまで、数学的モデリング研究と統計教育研究の関連を議論する創成型課題研究が展開されてきた。問題解決のための統計的手法を数学的モデルとして捉えるなど双方の関連付けにより、一方の知見を他方に援用するなどして、教育現場での取組改善を検討することには価値がある。モデリング・サイクルと統計的探究プロセスに基づいて授業を検討する際、よりよい解決に向けたプロセスを生徒

が主体的に、またサイクリックに進展させる経験を積ませることが大切である。しかし経験だけではなく、資質・能力として統計的な問題解決に関する方法知を身に付けることが重要である（青山, 2018）。

そこで本研究の目的を「統計的な問題解決に関する生徒主体のサイクル進展と方法知の自覚化を目指した中学校数学科の研究授業を計画、実施し、生徒の活動の様相や研究協議会での主な論点を報告すること」とする。

そのために、以下の方法で進める。

- (1) モデリングと統計教育に関する先行研究を基に、2時間扱いの授業を構想する。
- (2) 生徒が自覚化した方法知を記述する事後調査のアンケートを作成する。
- (3) 研究授業、事後調査、研究協議会を計画、実施し、ビデオカメラ9台で記録する。
- (4) 研究授業と研究協議会の映像、事後調査などの結果を分析し考察する。

2. 研究授業と事後調査のデザイン

(1) 本研究授業における指導上の留意点

本研究では、Blum and Leiß (2007) のモデリング・サイクルに着目する。数学外の世界に場面モデル (situation model) を組み入れている点 (松寄, 2019) を参考に、本研究授業では問題に関わる生徒の原場面を共有したり一旦の解決後に原場面 (松寄, 2018) へ意図的に帰着させたりして、主体的なサイクル進展を目指す。

また、統計的探究プロセスとして、Wild and Pfannkuch (1999) のPPDACサイクルに着目する。このサイクルの「計画」の相は、データ収集方法の検討など、生徒が解決の方針を立てる上で不可欠である (藤原他, 2015)。問題を定義付ける「問題」の相や結論を得たり新たなアイデアを創出したりする「結論」の相と関連が深く、統計的な問題解決に相応しい方法知の自覚化に貢献すると期待する。そこで本研究授業では、データの収集方法を検討する活動を充実させるために、グラフをかくなどのデータの数学的処理の効率化を図る。

主体的なサイクル進展のためには生徒が批判的思考を働かせることが必要である。例えば、生徒がつくった数学的モデル、根拠、結論を多様な視点から批判的に検討することで、各相の深い進展が見込まれる。また、自他の結論や根拠を比較する機会を設ければ、思考過程の相対化や各相の遂行に関する方法知への着目を促すことが期待される。本研究授業

では、他者との協働、交流の機会を設ける。

以上より、主体的なサイクル進展と方法知の自覚化を目指し、次の点に留意し指導する。

- 【留意点①】原場面の共有と原場面への帰着
- 【留意点②】データ収集方法を検討する機会の設定
- 【留意点③】処理の効率化による考察時間の確保
- 【留意点④】他者との協働、交流の機会の設定

PPDACサイクルで、留意点①は主に「問題」「計画」、留意点②は主に「計画」、③は主に「データ」「分析」「結論」、④は主に「分析」「結論」の各相に関連する。

(2) 教材と留意点との関連

本研究授業では、統計に関わる教材「小指ギャップ」(藤原, 2019) を扱う。「足部の外側の知覚誤差」(小林他, 2007) を教材化したもので、NHK総合のTV番組『チョコちゃんに叱られる!』で取り上げられていた。足の小指をタンスの角などでぶつけたことが多くの人にあらう。その経験を原場面と捉え、「人がタンスの角などで小指をよくぶつけるのはなぜか」という問いを原場面の問いとする (留意点①)。この問いに対して「タンスに小指をぶつけるのは、自分が思っているより約1 cm外側を歩いているから」(以下「1 cm理論」という既存の結論がある (小林他, 2007)。これを踏まえ、原場面の問いを焦点化した次の問題を取り上げる。

「1 cm理論」は正しいだろうか。足下を見ないで基準線に沿って足を置く実験で、「1 cm理論」が正しいかどうかを検証しよう。

第1時の後半に、教科書等を縦置きに持って足下を隠し、目先に伸びる基準線の先を両目で見ながら、足下の基準線に足部外側が接するように想像して片足を置く実験を行う。基準線と足部外側の誤差を定規0.1 cm単位で測定し、正負の数で記録してデータとする(基

準線を踏んだら正). 正確なデータ収集のために靴を脱いで片足を置くため, 基準線に凹凸があまりない別会場で実験する. そして, 左右の足で実験した結果の値をカードに書いて提出する. なお, 足下を隠して基準線に沿って片足を置く実験方法の概要は授業者から提示するが, 足下の隠し方やデータの値の表現方法などの細かな注意点については生徒自身が検討する (留意点②).

第1時と第2時の間の昼休み等(約30分間)で授業者が統計フリーソフト stathist に入力し, 階級の幅や境目の値が異なる複数の柱状グラフを作成し, 平均を求め, B5判の用紙で印刷しておき, 第2時からそれらを基に, 生徒はデータを分析していく (留意点③).

第2時には, 4人程度の班で1枚の四つ切画用紙に結論とその根拠を記述してポスターを作成するように指示する. この後, ポスターを教室の前方以外の三方の壁に貼り付け, 4人班の2人を残して2人が他班へ移動して質疑応答する交流の機会を設ける (留意点④).

例えば, 次の生徒の分析方法が予想される.

S1: データを柱状グラフで整理し, 中心傾向が1cmに近いかを視覚的に調べる.

S2: 平均や最頻値(未習)に着目して, 各値が1cmにどの程度近いかを調べる.

S3: 1cm付近の階級に含まれる割合(相対度数は未習)がどの程度多いかを調べる.

授業の終末に改めて「なぜよくぶつけるのか」という原場面の問いに帰着する発問, 新たな問いを引き出す発問を意図的に行う. 各過程を振り返って生徒から引き出された問いは, 板書して全体で共有する (留意点①).

本研究授業の目標は「日常生活の問題を設定し, 見通しをもってデータを収集し, 柱状グラフ, 平均, 割合などを用いて結論付け, その結論と根拠を説明することができる」で, 表1の展開で進める. 通常の授業では, 生徒にPPDACサイクルを部分的に経験させることも考えられる. 本研究授業では, 「データ」

「分析」の相における数学的処理の効率化や, 「問題」「計画」「結論」の相で考える時間の十分な確保などにより, PPDACサイクルの各相の遂行に軽重をつけ, 2時間の授業で一連のサイクル全体を生徒に経験させる.

表1 本研究授業における主な学習活動の展開

【第1時】	【第2時】
(1) 原場面の共有と問題の明確化	(5) 分析と結論付け
(2) 実験方法の検討	(6) 班同士の交流と振り返り
(3) 実験の実施	(7) 原場面との照合
(4) 分析方法の検討	

3. 研究授業の様子

令和元年12月16日の4, 5校時に, 埼玉県内国立大学附属中学校1年生1クラス(男女35人)を対象に筆者が実践した. 対象生徒は平成20年告示学習指導要領下で学習しており, 統計に関わる小学校第6学年までの内容(例えば, 平均, 柱状グラフ)は既習で, 中学校第1学年の内容(例えば代表値, ヒストグラム)は未習である. 小学校算数科で統計的探究プロセスが重視されるのが平成29年告示学習指導要領からであるため, 統計的な問題解決に不慣れであると推測される.

以下, 表1の各場面に対応させて, 時系列で授業の全体像を中心に報告する.

【第1時】(34人出席)

(1) 原場面の共有と問題の明確化(0:00~20:42)

1分間の自己紹介の後, 「家などで足の小指をぶつけたことはありますか」と問いかけた. すると, 「経験がある」と全員が挙手で答え, 1人は骨折したことがあると発言した. これを受け, 「あれってなんでぶつけるんだろうね」と問いかけると, 「足下を見ていないから」「足の小指が体の一番端だから」という発言があった. その後, ワークシートを配付して, 予想を2分間程度で記述し, 数人が発表した. すると, 「距離感がつかみにくいから」「直角の角を丸く曲がっているから」「足を動かすと

きにたぶん親指に意識がいつているから」という発言があり、板書した。

TV 番組で取り上げられていた内容を知っているかを問かけると 2 人が挙手し、1 人の「(小指が) 当たらないと思っいても当たってしまっっている」との発言を受け、「1 cm 理論」を紹介した。前掲の予想が関係しそうであることに触れた。授業者から「本当かな」と問かけ、小林他 (2007) の論文では被験者が 10 人しかいないという事実を紹介した。その上で「本当に正しいか実際にみんなで実験して確かめてみませんか」と持ちかけたところ、多くの生徒らの表情が緩み、共感的にならずく生徒もいた。生徒の動機付けを高めようと考え、生徒の結果の予想を聞いたところ、「ぶつかったことがあるからたぶん正しい」「本当に正しかったとしてもぶつける確率がわかっていた方が信憑性がある」「走っているときにぶつけるのでただ単に注意力散漫なだけじゃないか」という発言があった。

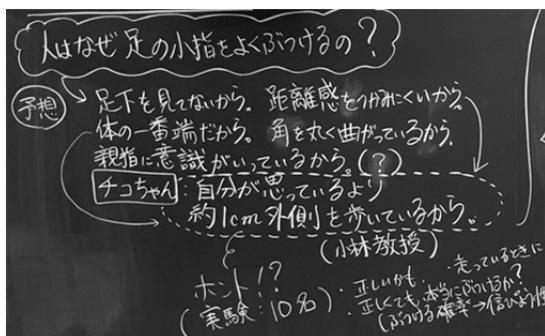


図1 板書の一部

TV 番組中の実験方法 (足下を隠して基準線に沿って片足を置く) を授業者から紹介し、「ひとまずこの実験方法でやってみるということでもいいですか」と持ちかけ、生徒の同意を得た。その上で「足下を見ないで基準線に沿って足を置く実験で、『1 cm 理論』を検証しよう!」と板書した (図2)。

(2) 実験方法の検討 (20:42~33:12)

授業者が実験の概要を説明した後、「実験ではどんなことに気を付ければよさそうかな」と問かけた。すると「基準線の奥を見る」

「ここを見るというところ (目印) を決めておく」という発言があった。また「足下が見えちゃってもいいかな」という授業者の問かけに対する「足より大きいもので隠す」「同じ大きさのもので足下を隠す」という発言を受け、試しに全員で立って足下を隠してみ、教科書 (B5 判) を制服の胸に貼られた名札の高さに置いて隠すこととなった。また、「ずれ方をどう表そうか」という問かけに対して「座標みたいに、基準線より左にずれたら -1 cm, 右にずれたら +1 cm とかと表す」という発言があった。また、「足のどこを測るかを統一しなくちゃいけないと思います」という発言があり、「1 cm 理論」を振り返ることで「測る部分は足の最も外側であればどこでもよい」ということが合意された (図2)。

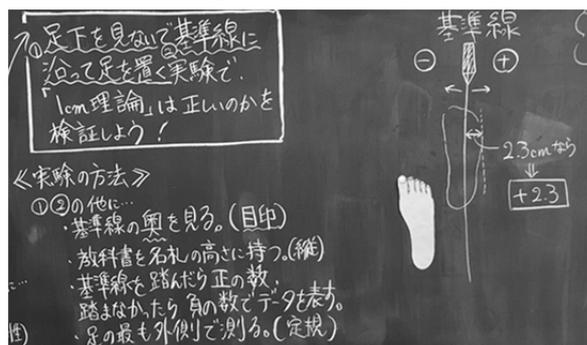


図2 板書の一部

その後、実験をするために、教科書と筆記用具を持って 3 分間かけて別会場へ移動した。

(3) 実験の実施 (36:12-46:58)

別会場では班ごとに整列し、教室で決めた実験方法を授業者が実演した。データを記入するカードを配付し、班員とペアを組むなどして、複数で実験に取り組んだ (図3)。



図3 実験の様子

(4) 分析方法の検討

(46:58~50:05)

実験後、「5 時間目にみんなのデータが 1 cm に寄っているのかどうかを調べるわけなんだけど、どうやったらわかるんだろう」と問い

かけた。すると、「平均」「グラフ」という発言が半数ぐらいずつ聞かれた。これを受けて「グラフってどんなグラフ」と問いかけると、多くが「棒グラフ」と答えた後で数人が「柱状グラフ」、1人が「数直線上に…」と発言した。授業者が「棒グラフと柱状グラフってどう違うんだろう」と問いかけた上で、これら2つでは扱うデータの種類が異なること、柱状グラフでは何cm以上何cm未満と区切って整理する必要があることを説明した。

第2時で生徒がグラフをかいたり平均を求めたりする時間を節約するために、授業者がデータを処理しておくこと、「1cm理論」が正しいかどうかを班ごとで考え、ポスターにまとめるという旨を伝えた。最後にデータを記入したカードを回収して、第1時を終えた。

その後の約30分間で、授業者が、実験データ(34人分68個)を基に、stathistで平均等を求め、柱状グラフを作成した。データの値の合計は167.4cm、平均は2.462cmであった。また、階級の境目や幅の異なる柱状グラフ①～⑤を作成し(図4)、B5判の用紙に印刷した。

【第2時】(35人出席)

(5) 分析と結論付け(0:00～32:03)

ポスターに班番号、結論、根拠を書くように指示し、後で班の交流の機会を設ける旨を伝えた。「みんなだったらどう区切って柱状グラフを作る」と問いかけ、階級幅などの区切り方を検討する必要があることを伝えた上で、柱状グラフ①～⑤を各班に配付し(図4)、必要に応じて選択し、ポスターに貼って使うように指示した。合計と平均を板書して知らせ、必要な班には電卓の使用を認めた。班活動は23分間行った。授業者は各班を巡回し、

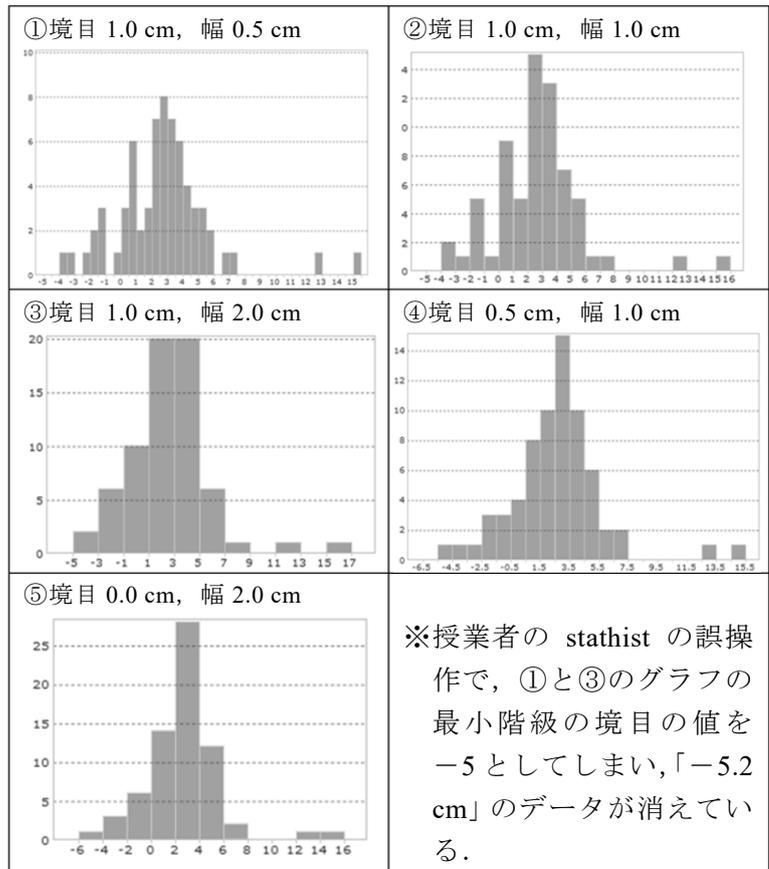


図4 第2時の冒頭で配付した柱状グラフ①～⑤

班の特徴的な考えを記述するように促していた。各班の記述の要約が表2である。

表2 各班のポスターの要約(グラフに下線)

[1班] 正しい。グラフ①で、0.5 cm 以上 1 cm 未満も多いから。しかし 2 cm 以上 3.5 cm 未満の部分も同じくらい多い。
[2班] 正しくない。±0.5 の範囲を「約」とすると、グラフ①で約 2, 3, 4 cm の人がそれぞれ 10, 15, 10 人で約 1 cm の 8 人より多いから。
[3班] 正しい。グラフ⑤を見ると、基準線よりも負の方向よりも正の方向にずれている人数の方が多いから。2 cm 以上 4 cm 未満ずれている人が多いから。平均が+ 2.462 cm なので 1 cm 以上外側にずれているといえる。
[4班] 正しくない。グラフ①を赤で囲った 0 cm 以上 1 未満より、青で囲った 2 以上 4 未満の人数が多いことがわかるから。
[5班] 正しくない。0.5 cm 以上 1.5 cm 未満を約 1 cm と仮定すると、グラフ①で、平均である 2.462 は約 1 cm に入っていないから。多くの人が入る範囲が 2.0 cm ～ 3.5 cm だから。
[6班] 正しくない。グラフ④で、1cm 付近よりも 3 cm 付近に集まっているから。グラフ⑤で、3 cm 付近(2.0

<p>cm 以上 4.0 cm 未満) の人数が全体の過半数を占めているから。 ※実際には 4.1% 程度</p>
<p>[7 班] 正しいが 1 cm は正しくない。グラフ②では、外側で 73.5% を占めているから「外側を歩いている」は正しい。「1 cm 理論」は、このクラスでは 2.462 cm だったため正しいとは言い切れない。総合的に誤差を考えると正しいとみなすことができる。グラフ①で 2.5 cm 以上 3cm が最も人数が多いから。</p>
<p>[8 班] 正しくない (半分正しい)。グラフ①を見ると外側を歩いている人が多いことがわかるので、外側を歩いている人が多い点は正しい。1 cm という点では、平均 2.462 cm やグラフ①の 2 cm 以上 4 cm 未満が多いから正しいとはいえない。</p>
<p>[9 班] 正しくない。平均が約 2.4 cm になるから。グラフ①を見ると、はずれ値 (基準線の見間違いが原因と予想) を除いて概算した平均が 2.1 cm となるから。</p>

各班の結論を見てみると、「置いた足がどちらにずれているか」と「ずれた長さは 1 cm か」という問いに対して答えている。9 つのうち 7 つの班が柱状グラフ①を採用している。階級幅などを変えてヒストグラムを複数作成したりそれらと比較・選択したりすることは中学校数学科の内容である。このことを未習である生徒は、より詳しくデータの値を見ようと柱状グラフ①を採用したと推測される。

(6) 班同士の交流と振り返り (32:03~49:36)

班で結論と根拠をポスターにまとめた後、班員の 4 人のうち、2 人が自班の画用紙を壁に貼り付けてその前に居残り、他の 2 人が他班の貼り付けたポスターを見に行き質疑応答する機会を設けた。前後半それぞれ 5 分 30 秒程度を確保し、授業者は教室全体を見渡し、空いた班へ他班の生徒を誘ったり直接質問をしたりして回った。その後自席に戻り、自班での協働と他班との交流を振り返って、5 分程度で自他の結論や根拠を比較して感想をワークシートに記述した。

自分たちは、このグラフと平均値を用いて、意識より外側を歩いていることは正しいと判断したが、他の班は正しくないという結論を出した班が約 4 人の理由として約 1cm の範囲に入っていないということが挙げられていた。どの班も外側を歩いていることには正しいと考えていたが、1cm の範囲をどうとらえるのかで結論が変わっているのと思った。

図 5 自他を比較した感想の例 (3 班)

例えば、ある生徒は、「1 cm の範囲の捉え方」に関する自他の考えの違いに気づき、批判的に考察している (図 5)。

(7) 原場面との照合 (49:36~54:02)

授業者から「最初、人はなぜ足の小指をぶつけるのか」という話から始めたでしょう。改めて最初の問いに戻ってみて、他に知りたいことはありますか」と問いかけた。すると 9 人が挙手し、黒板にある原場面の問いの横にそれぞれの発言の内容 (図 6) を板書した。

- ・実験では無くて日常生活ではどうか
- ・どういう風に物に当たるのか
- ・なぜ当たる時と当たらない時があるのか
- ・(足の) 右と左の差はあるか
- ・(小指ではなく) 親指だったらどうなるか
- ・(角を) 曲がる時 (の動き) はどうなるのか
- ・当たるときと当たらないときの意識差はあるか
- ・どうしたらぶつからないのか
- ・歩きながら実験したらどうなるか

図 6 9 人の挙手発言の内容

授業者は、生徒から新たな問いが次々と出されたことを褒めた。この後、事後調査の回答への協力を依頼して終えた。

4. 事後調査の実際

事後調査では、統計的探究プロセスの初学者が「計画」、「分析」、「結論」の相に関する方法知を記述できるか分析する。授業後に、板書など授業の記録を参照しない状況で、2 時間の授業を振り返って、図 7 の内容に対して 15 分間で回答する。

Q1 問題を解決するためにどのような活動をしたか、(1) (2) に続いて 下線部 に書いてください。
 ((6) まですべて埋めなくてよいです。)

Q2 それぞれの活動を上手にするにはどんなことに気をつければよいか、書いてください。
 (箇条書きでもよいです。)

(1) 問題を共有する	(4) _____
(2) 実験方法を考える	(5) _____
(3) _____	(6) _____

図 7 事後調査のアンケート内容

Q1では、サイクルの冒頭の2つの活動場面を予め示しておき、その後の活動場面を記述する。Q2では、各場面に関する方法知を自由に記述する。方法知の記述があった場合には、その方法知を自覚化しているものと解釈する。用紙は34枚回収した。

まず「計画」の相について「公正で効率的なデータ収集（例：よりよい実験方法を検討するには公正で効率的なデータ収集方法について検討するとよい）」「原場面・問題との照合（例：よりよいデータ収集方法を検討するには原場面や元の問題と照合するとよい）」に関する方法知について記述の有無を調べた（ $n = 33$ （回答方法理解不足の1人除く））。「公正で効率的なデータ収集」は75.8%が自覚化し、うち9.1%が量的データの表し方について言及した。このことから、「公正で効率的なデータ収集」に関する方法知の自覚化は単一の指導で効果が見込まれるといえる。一方、「原場面・問題との照合」に関する方法知の自覚化は42.4%と不十分で、「計画」の相で留意点①に基づいた継続的な指導が必要といえる。

次に「分析」・「結論」の相について記述した回答（ $n = 26$ ）のうち、「数学的根拠の明示（例：分析にはグラフや平均などを用いるとよい）」「原場面・問題との照合（例：分析や結論を出すときは原場面や元の問題と照合するとよい）」「新たな問いの生成（例：一連の過程を振り返ってよりよく解決するには新たな問いを見いだすとよい）」について記述の有無を調べた。「数学的根拠の明示」の自覚化は

81.8%で、うち51.5%が複数のグラフなどから批判的検討について言及した。割合は高いが、内容知を用いる場面や使い方にはどれも言及はなかった。生きて働く方法知を生徒が自覚化するには、中学校で内容知の必要性和意味を理解する学習の充実が必要と推察される。また、「原場面・問題との照合」「新たな問いの生成」の自覚化はそれぞれ39.4%、18.2%と不十分で、「分析」や「結論」の相でも留意点①に基づいた継続的な指導が必要といえる。

5. 研究協議会の実際

研究協議会には、中高大の教員等12人が出席した。協議では、問題解決のサイクルの各相を生徒が主体的に進展させており、そのプロセスは各相を往還するなど非線形で複雑であったことを共有した。その様相を詳しく探るべく、5班、7班、3班の順で、特徴的な班活動（図8）の過程に話題が移っていった。5班、7班、3班それぞれの活動の過程の概要は以下の通りである。

[5班] まず平均を見て「正しくない」と決めた上で、結論に合うように「1cmの範囲は ± 0.5 である」と仮定して、根拠を色々考えていた。2班も同様であった。

[7班] データの平均で結論を一旦得た後、さらにグラフで説明しようとするなど、複数のモデルを用いて批判的に考察した。

[3班] 結論を先に決めて根拠を探していった。まずは④、次に②のグラフを追加して

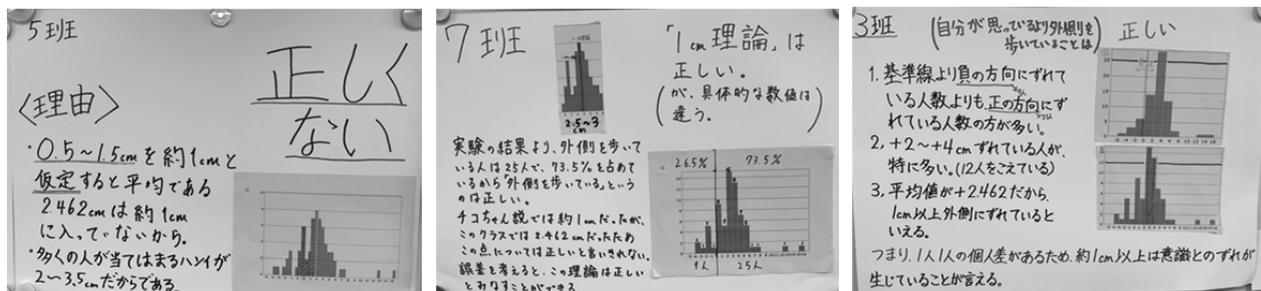


図8 班で作成したポスターの例（5班，7班，3班）

いった。「外側にある」は正しいが「1 cm」は正しくない、というように結論付けていた。「分析」と「結論」の相を往還していた。これらを受け、次の指摘があり合意された。

- ・ モデリングの観点では、生徒の問題は『「1 cm 理論」が正しいかどうかを判定するための望ましい規範的モデルはどのようなものか』であった。
- ・ 統計的な問題解決の観点では、生徒の問題は「足下を見ないで足を置いたときに、小指の位置が内側・外側のどちらにどれくらいずれているのか」であった。「1 cm 理論」がつくられた過程がサイクルの 1 周目で、本研究授業は 2 周目と捉えることができる。

6. 成果と課題

(1) 生徒主体のサイクル進展に関して

事前に設けた指導上の留意点①～④により、生徒の経験に基づく問いを基に、探究的なサイクルの各相を生徒が主体的に進展させることができた。留意点①～④の有効性が示唆される。一方で、研究協議会での「生徒にとっての問題が 2 つ併存していた」という指摘は、本教材に特有かどうかを検討する必要がある。

(2) 方法知の自覚化に関して

本研究授業の指導を通して、「公正で効率的なデータ収集」に関する方法知は単一の学習指導でも効果が見込まれるが、「原場面・問題との照合」に関する方法知は授業者による継続的な指導が必要となる。また生徒が自覚化する「数学的根拠の明示」に関する方法知の質を高めるには、その方法知を用いて問題解決する経験だけでは不十分で、必要性と意味の学習との関連付けが必要である。

今後の課題は、モデリング研究と統計教育研究に基づく授業を単元に位置付けて実践し、個人と小集団のそれぞれの思考過程を分析して指導への示唆を得ることである。

注：本研究は科研若手 18K13147, 及び科研奨励 19H00208 の助成を受けて行った。

引用・参考文献

青山和裕(2018). 方法知の指導に向けた数学的モデリング及び統計教育研究の展開について—大学生対象のケーススタディを足がかりとして—. 日本科学教育学会第 43 回年会論文集, 173-176.

Blum, W., & Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? In Haines, C., Galbraith, P., Blum, W., & Khan, S. (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA12): Education, Engineering and Economics* (pp.222-231). London: Horwood.

藤原大樹(2019). 生徒の活動を通じた統計的問題解決に関する方法知の特定. 日本科学教育学会第 43 回年会論文集, 227-230.

藤原大樹・栢元新一郎・川上貴・細矢和博・塩澤友樹(2015). 中等教育段階における生徒の統計的思考力の現状と課題—PPDAC サイクルにおける「計画」の相に焦点をあてて—. 日本数学教育学会誌, 97(7), 2-12.

小林吉之・嶺也守寛・藤本浩志(2007). ヒト足部の身体位置覚に関する研究. 日本機械学会論文集 C 編 73 巻 725 号, 274-279.

松寄昭雄(2018). 原場面に着目した数学的モデリング能力に関する研究—フッサー現象学の方法と応用反応分析マップを援用して—. 共立出版.

松寄昭雄(2019). モデリングにおける数学の臨界を議論する上での諸課題—Werner Blum が関わる図式における「Grundvorstellungen」や場面モデルに着目して—. 第 7 回春期研究大会論文集, 43-48.

Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999). *Statistical thinking in empirical enquiry. International Statistical Review*, 67(3), 223-265.