数学②コース：フィボナッチ数列の秘密

数学科　　阿部　真由美　　十九浦　美里

1.　はじめに

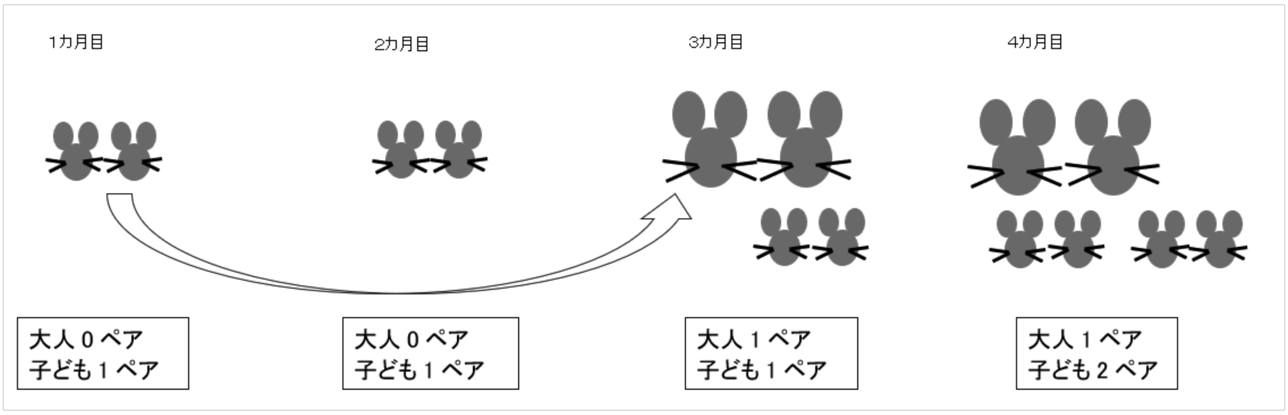
今回はフィボナッチ数列をテーマにした。高校２年生は１学期から数学 B で数列を学習している。そこで生徒にアシスタントを募ったところ，予想を上回る５名の生徒が名乗りでてくれた。事前に５つのトピックで授業の流れを考えていたので，その中からいくつかを選んでもらい複数人で担当して発表，授業をしてもらい，残ったところを教員が担当しようと考えていた。しかし生徒同士で担当や方法について相談してもらったところ，１人１トピックを担当するということになった。夏休み中に各自で準備を進めてもらった上で，全員で集まってリハーサルを行った。リハーサルでは，トピック間のつなぎの部分をどうするか，板書の使い方，どこを中学生に考えてもらい，時間をどれくらいとるか，など生徒と教員が一緒に相談して本番に臨んだ。当初は，教員がまとめや間をつなぐような役割をすることも考えていたが，リハーサルでの生徒の授業がとても素晴らしく教員の出番は最初の冒頭だけ，あとは生徒が授業を行う形で進めることにした。

2.　授業の内容

① ねずみ算

「生まれたばかりのねずみが１ペアいる。生まれて２か月から毎月１ペアにつき２匹（１ペア）ずつ子ねずみを産むとすると，10 カ月後にねずみは何匹（ペア）になっているだろう」という問題を提示。

プリントで表を与えて，大人のねずみの数と子供のねずみの数に分けて考えて合計を求めていった。



途中で，ヒントを与えながら授業者以外の高校生も机間巡視を行いながら，中学生が表をうめられるよう個別にも対応しながら進めた。

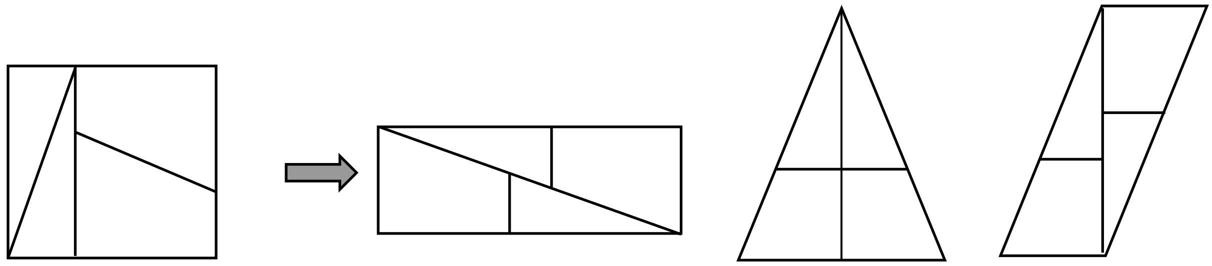
最後に合計数を並べた数列　{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ……} に注目することを伝えた。

② 面積１のパラドックス

「1 辺の長さが 8，13 の正方形を図のように線分で切って組み換え多角形を作ったとき，その図形の面積を求めてみよう」という問題を提示。

中学生一人一人に正方形を配布し，実際に紙を切り多角形をつくってみる作業を行った。自由に考えてもらったところ，長方形，三角形，さらに平行四辺形などもつくっており（下図），中学生にも発表してもらい，

一つ一つ面積を確認した。



「8×8 の面積 64 の正方形　→　13×5 の面積 65 の多角形」

に変形できる。ここで，65－64＝1 となり，面積が 1 増えていることに注目。同様に

「13×13 の面積 169 の正方形　→　8×21 の面積 168 の多角形」

に変形でき，この場合は面積が 1 減っている。

これらの図形の辺の長さは，①ででてきた数列の連続する 3 数「5, 8, 13」,「8, 13, 21」であり，この現象はフィボナッチ数列がもっている性質

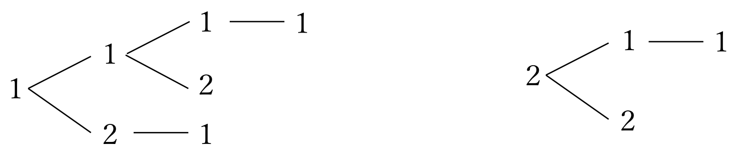
$$|a_n^2 - a_{n+1} \times a_{n-1}| = 1$$

が関係しているが，ここでは，まだフィボナッチ数列というキーワードは出さずに，①の最後にでてきた数とも照らしつつ，具体的な数で確認した。授業者の高校生は，面積が 1 だけ増えたり減ったりするところがパズル的で興味深いことであると強調した。見かけの図形に惑わされているが，面積は減っても増えてもいない。 1 増えてみえている長方形（三角形，平行四辺形）の方に実はわずかな隙間があり， 1 減っている場合はわずかに重なっている部分がある。

③　階段の上り方を考えてみよう

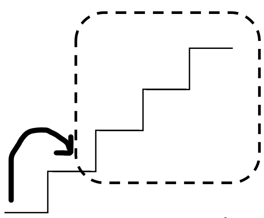
「茶実子さんは階段を 1 段ずつまたは 2 段ずつの 2 通りで上ります。階段の上り方は何通りありますか？」という問を提示。1 段のとき，2 段のとき，3 段のときの上り方の総数をスライドで一緒に確認した後，4 段のときには何通りになるかを中学生に考えてもらった。しばらく考える時間をとり，2 通りの考え方を解説した。

1 つ目は樹形図を用いる考え方で，下の図より 5 通りとわかる。多くの中学生は，この考え方で解いていた。

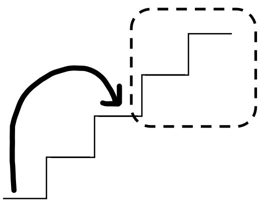


2 つ目は最初の 1 歩（1 段で上るか 2 段で上るか）で場合分けをする考え方。3 段，2 段の上り方の総数を足したものになることを確認し，この考え方を用いて 5 段のときの上り方も求めた。

（ⅰ）最初を 1 段にすると残りは 3 段→3 通り



（ⅱ）最初を 2 段にすると残りは 2 段→2 通り



最後に，1 段から 10 段までの上り方の総数を表に表してみると，ねずみ算の際に登場した数列と一致。この数列の作り方は，直前の 2 項を足すことで次の項が求められることを確認した。

階段数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
上り方	1	2	3	5	8	13	21	34	55

④　フィボナッチ数列の一般項

「数列」という概念を定義し，「初項 a_1」，「一般項（第n項） a_n」，「 数列 $\{a_n\}$」などの用語，記号を説明し，簡単な等差数列を例として扱い，記号の扱いに慣れてもらったうえで，①②③で扱った数列は「フィボナッチ数列」という数列であることを伝え，改めて，$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$という性質を確認した。

さらに，フィボナッチ数列の一般項a_nを紹介。

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

この一般項を求めることは，高校数学をすべて学んでからでなければできないが，nに具体的な値を代入して確かめることはできる。実際に黒板で授業者の高校生が　$n = 1$ を代入して計算し$a_1 = 1$となることを確認した後，プリントに沿ってa_2，a_3の値を中学生にも計算してもらい，フィボナッチ数列の第 2 項，第 3 項の値になることを確かめた。

⑤　フィボナッチ数列と黄金比

フィボナッチ数列の隣り合う項の比$\frac{a_{n+1}}{a_n}$を表にしたものを示し，表から何か気が付くことはないか中学生に考えてもらった。nが大きくなるにしたがって比の値が一定の値 1.618…に近づいていくこと，その値が実は$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，すなわち黄金比であることを伝えた。

ここで，テーマ「なぜ，フィボナッチ数列の隣り合う項の比が黄金比に近づくのか数式を用いて考えてみよう」を提示。$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$と仮定し，漸化式

$$a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \quad \cdots\text{(A)}$$

を用いて導くという方針を示した。中学生にとっては少し難しい内容であるが，計算過程は中学生でも十分取り組める内容であるため，ヒントを与え，部分的に考えてもらいながら証明していった。

まず，(A)式の両辺をa_{n+1}で割ると

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_n}{a_{n+1}} + 1 \qquad \cdots\text{(B)}$$

(B)式を用いてαの 2 次方程式を作る。

$$\alpha = \frac{1}{\alpha} + 1$$

$$\alpha^2 = 1 + \alpha$$

$$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$$

$$\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$\alpha > 0$　　より　　　　$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

また，④で示した一般項の構造からも考察してみる。

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

に着目すると　$(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n=\{(-1)\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\}^n=(-1)^n(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})^n \fallingdotseq (-1)^n(0.618)^n$

nを限りなく大きくしていくとこの値はほぼ 0 に等しくなるので，nが限りなく大きいときは，

$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$　　とみなすとする。このとき

$$a_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\times\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=a_n\times\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

つまり「a_n に $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ を掛けるとa_{n+1}が求まる」とみることができる。nの値が小さいときはの部分の影響を受けるので比は$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$とは違う値になっているが，nの値が大きくなると影響を受けなくなっていくのでどんどん$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$に近づいていくことが読み取れる。

3.　おわりに

教師役の高校生たちが担当したトピックについて十分に理解した上で授業を行ったことで，本コースに参加した中学生からは, 大変高い評価を得た。それぞれが好きな数字を言って和やかな雰囲気を作り出したり，中学生が難しく感じている部分を素早く察知して，授業者とは別の生徒が補足の説明を加えたりして，わかりやすく楽しめる授業が展開できた。高校生にとっても，他者に物事をわかりやすく伝える良い経験となったようである。

アンケートより：

・高校生の方の授業を受けました。中学生の知識で考えられるよう優しく指導してくださり，とても興味深く受講できました。時間がとても短く感じました。高校生になったら自分も自ら提案したりできるような人になりたいです（中学生)。

・高校生の私たちでも少し難しい内容をどうやったら中学生におもしろく理解してもらうか考えるのは難しかったですが，中学生と関われたのは楽しかったです。中学生が少しでも理解して興味をもってもらえていたらいいなと思います（高校生）