数学①コース：数の性質～割り算の余りに注目してみよう～

数学科　　三　橋　一　行

1. はじめに

今年度の数学①コースは，次のような内容で行った。

『数の性質～割り算の余りに注目してみよう～』　（定員 20 名）
2000 の 2000 乗を 12 で割った余りはいくつですか？パソコンや電卓がなくても大丈夫。割り算とその余りの性質をよく見てみよう。その性質を生かした「合同式」を利用すれば紙と鉛筆で求められます。「合同式」を使って難しい定理や大学入試問題などを一緒に解いてみましょう。また，自然数の性質により「1+1＝２」を証明してみます。柔軟な頭脳を準備して来てください。

割り算の余りに注目してもらって，余りが同じ整数は仲間である（剰余類）という考えを導き，それらを記号「≡」を用いて表現する。すなわち合同式の定義と簡単な性質を学び，その後，それを利用して 2000 の 2000 乗を 12 で割った余りを求めるという問題を解決してもらう。この一連の学びをきっかけとして，さらに他の問題にもチャレンジしてもらうというのがこの授業の流れである。

このテーマを設定した理由は，「ベイズの定理」，「1+1＝２の証明」，「合同式」の３テーマを 1 回の授業中に少しずつ取り上げていくという，一昨年度行った短編集的な授業を中学 3 年生に試みたことに由来する。その理由を箇条書きにすると，

①　上の 3 テーマの中で，「合同式」が最も理解が速く，問題への取り組みが良かったこと。
②　「合同式」とその性質を短時間で理解でき，簡単な問題を解くことに応用できるようになったこと。
③　昨年度は「特殊相対性理論」をテーマにしていたので，数学の原点である「数」をテーマにしてみようと考えたこと。

主に以上の 3 つの理由から今回の授業設定に至った。説明の理解スピードや問題演習への取り組みが良いということは，中学三年生でも比較的わかりやすく，その活用も容易に出来るからだと考えられる。このようなテーマをメインに取り上げることで，単発の 1 時間 30 分ほどの授業が，数学の面白さや有用さを伝えることを期待したためである。また，問題も大学入試問題をメインに取り上げたので，そのような理由からも生徒の興味をひくものであることが十分に考えられる。

２. 実際の授業

この授業のために作成した問題プリントを以下に示しておく（図 1－１，図 1－２）。授業内容とその流れがわかっていただけると思う。問題設定の理由とその問いで学び，取り組む内容は，次の通りである。問ごとにコメントを付す。

$\boxed{1}$ 小学校で用いられる割り算の式である。実はこの式は等号の使用法を間違えている。そういった話題を踏まえつつ余りに注目させていく。
$\boxed{2}$ 割り算の余りによって整数が分類されることを学ぶ。これが剰余類の考えである。
$\boxed{3}$ 余りの加減，積，累乗と被除数の加減，積，累乗が一致することを学ぶ。
$\boxed{4}$ 同一の剰余類に属する整数は同じ（合同）と見なす。合同式とその表現方法を学ぶ。
$\boxed{5}$～$\boxed{9}$　入試問題や数学史上有名な問題を，合同式を用いて解いていく。$\boxed{8}$ は都合により，図をプリント

に載せられなかったが，次のような問題である。｢左手の親指から人差し指，中指へと数えていき，小指で５を数えたら薬指を６として親指方向に戻りながら数える。親指に戻ったらまた小指方向に数えていく。これを繰り返すと，親指と小指だけがダブルカウントされずに数えていくことになる。このとき，2023 はどの指になるかという問題である。指ごとに数を記入していくとそれは，８を法とした剰余類になっていることがわかる。８はお気づきの通り，1 往復の 10 本の指のうちダブルカウントしない親指と薬指の２本分を引いた数すなわち８のことである。したがって 2023 を８で割った余りによってどの指になるかわかるという仕掛けになっている。これは，中学入試などで出題されたことがある問題である。はじめは難問であったと思われるが合同式や剰余類ということを知っていれば，比較的簡単に解けてしまうものである。当日は，図で示しにくいので数え方を実演して見た。かなりあっさりと解けてしまうので受講生徒の反応は良かった。受験で出題される整数問題について，合同式の有効性をかなり実感できているようである。

$\boxed{10}$ 最後に「1+1＝2」の証明について考えてもらう問題を設定する。ペアノの公理を紹介して，それをもとにして証明にアプローチしてもらうための問題である。(時間があまった時の予備問題として用意した。)

2023.8.26.　1日理数体験授業　数学①コース　問題№１　お茶の水女子大学附属高等学校　　　名前(　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 次の式の誤りを指摘して、正しく表現しなおしなさい。

７÷３　＝２　－　１

$\boxed{2}$ 自然数の集合（あつまり）N を、割り算の考えを使って、次の数に分けなさい。

（１）　２つ　　（２）　３つ

$\boxed{3}$ a,bを整数とする。a を5で割ると2余り、b を5で割ると４余る。このとき、次の数を5で割ったときのあまりを求めなさい。

(1)　$a+b$　（２）$a-b$　（３）ab　(4)　a^2

$\boxed{4}$ <合同式>

$\boxed{5}$ 次のものを答えなさい。

(1)　15^{100} を６で割ったときの余り。　(2)　3^{2222} を5で割ったときの余り。

$\boxed{6}$ 2000^{2000} を12で割ったときの余りを求めよ。

s

$\boxed{7}$ 全ての自然数 n に対して整数

$a_n = 19^n + (-1)^{n-1}\ 2^{4n-3}$　$(n = 1, 2, 3, 4, \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot)$

のすべてを割り切る素数を求めよ。

図２－１

2023.8.26.　1日理数体験授業　数学①コース　問題№2　お茶の水女子大学附属高等学校　　　　名前(　　　　　　　　)

$\boxed{8}$ 次の図のように、数えていったとき、2023番目はどの指になるか答えなさい。

$\boxed{9}$ 次の各問いに答えなさい。

(1) n を自然数とする。このとき、 n^2 を４で割った余りは、０または１であることを示しなさい。

(2) 3つの自然数、 a,b,c が

$$a^2+b^2=c^2$$

を満たしている。このとき、 a, b の少なくとも一方は偶数であることを証明しなさい。

$\boxed{10}$ 1＋1＝２の証明

中学生向けに解説するのはキビしいですが、やってみましょう。

＜その前に＞

○　証明してもスッキリはしない。

○　1+1　とは何か。足し算とは何か。

○　公理、定義　→　定理、証明。

○　数学は真か（証明法が正しい事を証明したのか？）。

ペアノの公理

Ⅰ．1は自然数である。

Ⅱ．自然数aの１つ後ろには、後継者 a＋1 がいる。

Ⅲ．異なる自然数の後継者は異なる。(前に戻ってこない)

Ⅳ．1はどの自然数の後継者でもない。（1の前に自然数は存在しない)

Ⅴ．1で成り立ち、その後ろの数でも成り立つなら、すべての自然数で成り立つ。

図２－２

3.　まとめ　－ 受講生の様子と今後の課題　－

前回に続き，今回も受講生を中学校 3 年生の女子に限った。3 年生であるので，数学的な基礎力は十分にあり，予想以上にスムーズに授業が進んだ。

今後に向けて検討しておきたいのは,「問題が解ける」ことと作業過程で用いている概念や式が「理解できている」ことが同じではないということである。今回の授業も合同式の扱い方に慣れて答えが出せているだけかもしれない。数学教育が最終的に目指すのは,「できること」だけではなく,「できたことへの理解」である。そこまでいかないと応用問題を前にしたとき，既習事項を応用して問題解決ができないのである。今回，ほとんどの生徒が合同式を用いて比較的難問が容易に解けるようになった。しかし，その背後にある意味の操作も理解出来ているのであろうか。おそらくこの短時間では，そこまでには至っていないであろう。こういった背後にある意味の理解までに学力が及んでいるかどうかを検証することも研究の一環として考えてみたいと思っている。しかしながら，今回のような単発型の授業において，それを実施することは困難である。今回のような中学生が高校の内容を体験する授業においては，真の理解を求めることは厳しいことである。それよりも，一先ず「できる」,「できた」ということを大事にする授業があっても良いと考える。まず技術的な部分を獲得していれば，今後その内容や意味を考え理解を深める機会が多くなるであろう。その点においては，今回の授業は十分に意義あるものとなったのではないかと思われる。

最後の問題で「1+1＝2 の証明」を行って見た。まず，証明に関しての先入観が中高生にはあるように思われる。先入観とは，証明をするということは「わかりやすくなる」ことだという考えである。残念ながら証明するという行為は理解を促してくれるものであるとは限らない。論理的整合性さえ整っていれば良く，そ

の意味で証明をするという行為はかなりハードルが高い。中学生であるとすると論理力も弱く，定義を用いるとか，定義に帰着させるなどということはなかなか思いつかず，生徒が自然に数学の証明の作法を身につけていくまで待たねばならないだろう。前回，このテーマを用いた場合と同じで，なんとなく理解できたような気はするが，しっくりこないという受講生は多かった。生徒一人で自発的に解決するのはほぼ困難な問題である。なぜ，この題材を持ってきたかというと「当たり前だ」と思っている簡単な事でも「証明する」となるとかなり大変な作業になるということを伝えたかったからである。この場合，自然数とは何かを知らなければ証明ができない問題である。難しい事が難しいのは当然であるが，簡単なことが簡単であるとは限らないことを知ってもらいたかったのである。しかしながら，2 回このテーマを用いて授業してみたが，問題としての興味を引く効果がかなり大きい反面，説明し終わった後の受講生の反応が静まり返ってしまった。このテーマに関しては授業方法を改善するか，もっと高学年になるまで扱わないほうが良いだろう。やる気が十分にあふれている生徒にとっては考えさせても良いが，一般向けの課題としてはレベルが高すぎたことを反省する。

最終的には，合同式の理解までは至らなかった受講生が多かったと思われるが，合同式を用いて問題を解くという技術を獲得し，その技術で問題が解けたことを体験できた受講生が多かった授業であるとは言える。

今後も改善を重ねより効果の高い授業実践の研究を続けていくつもりである。

参考文献

「改訂第 2 版　佐々木隆宏の整数問題がおもしろいほどとける本」　佐々木隆宏 著　KADOKAWA

「数学 A（教科書）」　数研出版

「数学 B（教科書）」　数研出版