不等式の証明の指導の工夫
―生徒の記述や答案を活用した授業実践―

数学　阿　部　真由美

1. はじめに

「証明」については，中学段階でも図形分野や整数の性質についての証明を扱っているが，高校段階では，より証明する内容が抽象化する。特に「数学Ⅱ」で扱う「不等式の証明」では，証明の根拠となる実数の性質・等式の性質・不等式の性質についての正しい理解，「数学Ⅰ」や「数学Ⅱ」で学習した式変形の技能が必要となる。数学の文法に則って読み手にわかるように記述をすることは，証明問題だけでなく，さまざまな問題を論理的に解くための基礎を身に付けることにつながる。とはいえ，小テストや定期テストでの答案を見ると，基本の型に沿って論理的に記述するのは生徒にとっては難しいようである。ここでは，「不等式の証明」の指導に焦点を当て，生徒の答案を題材にした授業実践をもとに，新指導要領における3つの学力「知識および技能」「思考力，判断力，表現力」「学びに向かう力，人間性等」を意識した指導の工夫について考えたい。

2. 「不等式の証明」の目標と証明に用いる性質

2.1. 目標について

平成30年3月告示の『高等学校学習指導要領』第4節　数学　第2「数学Ⅱ」の「目標」には，「数学的な見方・考え方を働かせ，数学的活動を通して，数学的に考える資質・能力を次のように育成することを目指す。」(2)「数の範囲や式の性質に着目し，等式や不等式が成り立つことなどについて論理的に考察する力・・・」，(3)「・・・粘り強く柔軟に考え数学的論拠に基づいて判断しようとする態度･･･」とある。また，「内容」には（1）いろいろな式　において，「イ（イ）実数の性質や等式の性質，不等式の性質などを基に，等式や不等式が成り立つことを論理的に考察し，証明すること。」とある。

上記の目標を踏まえ，本校の1年生（2学期末までに数Ⅰの内容は学習済みで，3学期に数学Ⅱの内容の学習を始めている）を対象に，数学Ⅱ「不等式の証明」に関しては次の3点の定着をはかり指導を行った。

・「証明の方法」に沿って証明する。（知識・技能）

・不等式の性質，実数の性質を理解し，使えるようにする。(知識・技能)

・証明を論理的に記述する。（思考・判断・表現）

特に，2021年度入試から導入された「大学入学共通テスト」においては，思考の過程を重視する問題も出題され，ますますどのように考えてその結論に至ったかを説明できる力が必要となってきている。本単元では，論理的に考えることはもちろんであるが，

思考の過程をどのように記述したらよいかを意識させ，その後に学習する各単元にて新しい知識を吸収しながらさらに難易度の高い課題にも取り組めるようにしたい。

2.2. 不等式の性質，証明の根拠として用いる実数の性質について

本単元において，教科書で確認している性質は主に以下のものである。

- 実数の大小関係の基本性質
- 実数の平方についての性質
- 正の数の大小と平方の大小の性質
- 絶対値と不等式の性質
- 相加平均と相乗平均の大小関係の性質

証明を記述する際，上記の性質は証明なしで根拠として用いてよいこと，これらの性質のどれを用いたのかすぐさま判断できない式については，説明が不十分とみなされることを授業の中で確認した。

証明の指導の際，生徒のノートにみられる記述で以下の①のようなものがあった。ただし a, b は実数という設定である。

$$a^2+b^2+ab \geqq 0 \qquad \cdots ①$$

$$a^2+b^2+ab=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2 \geqq 0 \qquad \cdots ②$$

①の左辺が 3 つの項の和で表されているため，生徒は，そのままの形でもゼロ以上であると判断してしまうようである。a, b が異符号の場合は，積 ab は負の値となり，必ず左辺がゼロ以上になるかどうか判断できないため①の左辺の形からゼロ以上と結論付けるには飛躍がある。　　②の第 2 式のように

（実数の 2 乗）＋（正の数）×（実数の 2 乗）

への変形を行えば，「実数の平方は必ずゼロ以上になる」ことを根拠として，不等式が成り立つことが説明できる。「不等式①を証明せよ」という直接的な問題は教科書の練習問題でも行っており，ほとんどの生徒が②のように変形して示すことができる。ところが，ある式を証明する過程で①の左辺まで到達した場合は，②のような変形を行わずにゼロ以上と結論づけてしてしまう。学習が進むにつれて扱う式が複雑になり，単純な形に変形することに気を取られ，基礎・基本に注意が向かなくなってしまうとも考えられる。

3. 小テストの活用例

3.1. 小テストの実施と結果

数Ⅰ・数Ⅱの授業においては単元ごとに，教科書に沿った基本事項の学習の後に小テストを行っている。生徒にとっては，どこまで詳しく記述できていればよいのか，（減点された場合は）どのような条件を見落としてしまったのかを確認でき，その後の学

習に生かせるという意味で小テストは有効であると考えている。一方で，採点者が減点した意図を正しく読み取り，次の学習に生かしていけるかどうかは生徒本人の理解力と意識にかかっている。小テストだけに限ったことではないが，能動的に取り組むことが必要である。

以下が不等式の証明分野から出題した証明問題と模範解答である。(小テストは三橋教諭が作成した。小テストの出題範囲は等式の証明もふくまれ，ほかに大問が 2 つあった。)

問 $a>0,\ b>0$ のとき,次の不等式を証明せよ。（等号成立条件は答えなくて良い）

$$\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geqq \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$$

（証明）

両辺の平方の差を考えると

$$\left(\sqrt{\frac{a+b}{2}}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2=\frac{a+b}{2}-\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{4}\geqq 0$$

よって

$$\left(\sqrt{\frac{a+b}{2}}\right)^2 \geqq \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2$$

$\sqrt{\dfrac{a+b}{2}}>0,\ \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}>0$ であるから

$$\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geqq \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$$

（証明終）

生徒の答案を見ると，与式が平方根を含む式であることから，両辺を平方してから大小関係を示していく，という方針は立てられていた。一方で，証明の方法に沿っていない記述，不等式の性質を正しく用いて式変形を行っているか確信の持てない記述，式と式のつながりを説明する言葉が不足し意味が通らない記述が多く，完答できている答案は三分の一に満たなかった。単純に左辺と右辺の差をとり，式が変形できずに行き詰まっている答案も少なからず見られた。例年に比べ定着度が低いことの原因を十分に分析できてはいないが，コロナ禍の影響により教師だけでなくクラスメイトとも物理的な距離をとる必要があったため，授業内外での教え合い・学び合いの機会は例年よりかなり減ってしまった。今年度の授業を振り返ると，教師側からの一方的な授業が多くなったことは否めない。今回の小テストの復習としては，教師が小テストの解説をするのではなく，より良い記述をするには何に気を付ければよいかを，生徒たち自身が考えられるよう計画することにした。

こういったことから，生徒の誤答例を教材として次のような展開で授業を行った。

3.2. 小テストの答案の誤答を活用した授業の実践

以下のように,1 時間（45 分）の授業を活用して,小テストの復習の授業を展開した。

展開 1　小テストを返却する前に，再度，小テストで出題した問題に取り組む　(3 分程度) （ここで，全く小テストの問題に手がつけられない生徒については，教科書を見ても良いことを伝える。）
展開 2　【資料 1】の誤答例（1 年生全体の答案から典型的な間違い 7 例）を提示し間違いを指摘させる。よりよい証明にするにはどのように記述すればよいかを考えさせる。(20 分程度)
2-1　まず個人で（人と相談せず)，誤答例のどの部分が証明として不十分か,どのように修正すれば良いか考える。(10 分程度)
2-2　3～4 人程度のグループを作り,考えたことをグループ内で確認･共有する。(10 分程度)
展開 3　クラス全体で共有するため，一つの例に対し 1 グループずつ指名し，代表者に説明させる。(7 ～ 8 分程度)
展開 4　不等式の証明方法，性質について教科書を用いて再度確認する。
最後に小テストを返却する。(5 分)

実際の授業で 展開 3 における各グループからの発表の内容は主に以下のようなものであった。ただし，以下の①，②,・・・は【資料 1】の例ごとに付けた式の番号を表す。

例 1 について
- 不等式の証明の方法を無視している。
- ①から④までは同値変形をしたということなのか。④の意味は③と同値であるといいたいのか，それとも実数の 2 乗の形だからゼロ以上であると述べているのかわかりにくい。④から⑤の間に説明が必要。

例 2 について
- 不等式の証明の方法を無視している。
- ④と⑤は（一般的には）同値ではない。

例 3 について
- ①が成り立ったと書いてあるように読める。実際は，①を証明すればよい，という意味なので,「・・・を示せばよい」などの説明が必要。

例 4 について
- ③で符号が違ってしまっている。

例 5 について
- ⑤まででは，与えられた不等式を示せたことにならない。2 乗した式の大小しか示せていない。(模範解答の下から 3 行分を付け加えることが必要。)

$\boxed{\text{例 6}}$ について

・⑦のあとに

$$\left(\sqrt{\frac{a+b}{2}}\right)^2 \geqq \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2$$

という式を書く必要がある。⑧は書かなくてよい。

注：⑦のように左辺に項が寄せられている式から⑧を導くことは，授業内では「飛躍がある」としている。

$\boxed{\text{例 7}}$ について

・④の左辺のままではゼロ以上とは言えないので，平方完成するか例 6 のように相加平均・相乗平均の大小関係を使って説明したほうがよい。

これらの各グループの発表を受けて，$\boxed{\text{展開 4}}$ では，以下の事項を再度確認した。

・例 1，例 2 のような同値変形で結論からさかのぼっていく方法は，間違いとは言えないが，避けたほうがよい。どこまでが証明されていて，どこからが証明されていないことなのかがわかりにくくなることが多いので，まずは不等式の証明の方法に沿って記述できるようにする。また，式の羅列だけでは伝わらない場合が多いので，式と式のつながりがわかるように（言葉で）説明を挟む必要がある。

・正の数の大小と平方の大小　$A>0,\ B>0$ のとき　$A>B \iff A^2>B^2$
を利用して「平方の差をとってから不等式を証明する」場合は，条件「A ＞ 0, B ＞ 0」を満たしているかどうか，必ず明記する。

3.3. 授業者の振り返り

題材が「実際のテストで生徒が書いた記述」であったという点で，課題への生徒の関心が高かった。課題のプリントを配付するとすぐに「私もここができなかった」などという発言があちらこちらから聞こえた。

$\boxed{\text{展開 2}}$ において，個人→グループという順に段階を踏んだため，個人レベルで「理解できている部分」と「そうでない部分」がある程度明確になった状態からグループワークに入ることができた。小テストの際にほとんど記述ができなかった生徒も，$\boxed{\text{展開 1}}$ の時点で教科書の例題などを確認していたことにより積極的にグループに関わることができていた。決まった生徒だけでなく，多くの生徒が発言している姿が見られ，グループでの活動が効果的なものとなった。また，比較的数学が得意な生徒と苦手な生徒の両者がグループ内に混在し，普段の授業で行う個人の活動と違い積極的に学び合う場面も多くみられた。

筆者が担当する 2 クラスでの授業では，$\boxed{\text{展開 2-2}}$ （グループワーク）は 10 分では足りず，15 分近くの時間を要した。誤答例を 7 つ用意したが，例 4 はケアレスミスであり，例 4 を除く 6 例，あるいは授業内で考えさせるものは 4 例くらいに絞れば，全体での発表・共有の時間も余裕ができたと思われる。時間配分や分量等は改善の余地

がある。

誤答例に対して，答案を書いた人の意図を汲みつつ，どの部分が不十分か明確に説明するのは教師でも時間を要する。言葉に詰まるグループもあったが，何行目までは正しいか，どういった説明が足りないのか，など生徒の言葉で説明を行うことができ，批判的思考を働かせながら取り組んだことが確認できた。他のグループの生徒もうなずきながら聞いていたのが大変よかった。模範解答と誤答例も含めると，「不等式の証明」で用いるほとんどの性質を本授業内で確認できたことも良い復習となった。

4. 終わりに

残念ながら，授業に関する生徒のアンケートは直接取ることができなかったが，定期テストにおいて，平方の差を用いた不等式の証明の問題を出題したところ 8 割以上の生徒が完答できていた。本単元にて，さまざまな誤答例を観察したこと，グループの話し合いにより能動的に関わり，学習内容を効果的に復習できたことは，自分自身が作成した答案を客観的にみる力につながったのではないかと考える。新課程から課題学習も加わり活用の部分に重点をおくことになりそうであるが，一方でこのように，一通りの単元の学習が済んだときに，生徒自身が学習内容を客観的に眺めたり基本に立ち返ったりする機会も大切にしながら今後も取り組んで行きたい。

参考文献

数研出版　改訂版数学Ⅱ　104 数研 / 数Ⅱ 327

文部科学省『高等学校学習指導要領（平成 30 年 3 月告示)』(2018.3)

文部科学省『高等学校学習指導要領（平成 30 年 3 月告示）解説　数学編　理数編』(2018.7)

文部科学省　国立教育政策研究所教育課程研究センター『学習評価の在り方ハンドブック』

数Ⅰ　　小テストの復習　　No.1

【資料1】

問　$a>0,\ b>0$ のとき,次の不等式を証明せよ。（等号成立条件は答えなくて良い）

$$\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geqq \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$$

☆まず，証明を書いてみましょう。

（証明）

☆次に示す7つの解答例は、証明としては不十分なところがあります。

どこが不十分（あるいは、間違い）なのか、どのような式説明を加えたり，修正したりすれば正しい証明になるのか，考えましょう。

例1

（証明）

$\left(\sqrt{\frac{a+b}{2}}\right)^2 \geqq \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2$　…①

$\frac{a+b}{2} \geqq \frac{a+2\sqrt{ab}+b}{4}$　…②

$2a+2b \geqq a+2\sqrt{ab}+b$　…③

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqq 0$　…④

よって　$\left(\sqrt{\frac{a+b}{2}}\right)^2 \geqq \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2$　…⑤

$a>0$，$b>0$ より　…⑥

$\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geqq \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$　…⑦　（証明終）

例2

（証明）

$\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geqq \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$　…①

$\Leftrightarrow\ \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{2}} \geqq \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$　…②

$\Leftrightarrow\ \frac{\sqrt{2a+2b}}{2} \geqq \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$　…③

$\Leftrightarrow\ \sqrt{2a+2b} \geqq \sqrt{a}+\sqrt{b}$　…④

$\Leftrightarrow\ 2a+2b \geqq a+2\sqrt{ab}+b$　…⑤

$\Leftrightarrow\ a+b \geqq 2\sqrt{ab}$　…⑥

相加･相乗平均の大小関係より成り立つ。　（証明終）

例3

（証明）

$a>0, b>0$ より　$\sqrt{\frac{a+b}{2}}>0, \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}>0$ なので

$\frac{a+b}{2} \geqq \frac{a+2\sqrt{ab}+b}{4}$　…①

$\frac{a+b}{2}-\frac{a+2\sqrt{ab}+b}{4}=\frac{2a+2b-(a+2\sqrt{ab}+b)}{4}$　…②

$=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$　…③

$=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{4}$　…④

$\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{4} \geqq 0$　より　…⑤

$\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geqq \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$　…⑥　（証明終）

例4

（証明）

$$\left(\sqrt{\frac{a+b}{2}}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2 \quad \cdots①$$

$$=\frac{a+b}{2}-\frac{a+2\sqrt{ab}+b}{4} \quad \cdots②$$

$$=\frac{2a+2b-a+2\sqrt{ab}-b}{4} \quad \cdots③$$

$$=\frac{a+2\sqrt{ab}+b}{4} \quad \cdots④$$

$$=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4} \quad \cdots⑤$$

$$=\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2 \quad \cdots⑥$$

$\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2 \geqq 0$ より　不等式は成立する。　（証明終）

例5

（証明）

$$\left(\sqrt{\frac{a+b}{2}}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2 \quad \cdots①$$

$$=\frac{a+b}{2}-\frac{a+2\sqrt{ab}+b}{4} \quad \cdots②$$

$$=\frac{2a+2b}{4}-\frac{a+2\sqrt{ab}+b}{4} \quad \cdots③$$

$$=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{4} \quad \cdots④$$

$$=\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2}\right)^2 \geqq 0 \quad \cdots⑤$$

よって不等式は成立する。　（証明終）

例6

（証明）

$$\left(\sqrt{\frac{a+b}{2}}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2 \quad \cdots①$$

$$=\frac{a+b}{2}-\frac{a+2\sqrt{ab}+b}{4} \quad \cdots②$$

$$=\frac{2a+2b-a-2\sqrt{ab}-b}{4} \quad \cdots③$$

$$=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{4} \quad \cdots④$$

$a>0,\ b>0$ より　相加平均・相乗平均の大小関係によって

$$a+b \geqq 2\sqrt{ab} \quad \cdots⑤$$

したがって　$\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{4} \geqq 0$　$\cdots⑥$

よって　$\left(\sqrt{\frac{a+b}{2}}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2 \geqq 0$　$\cdots⑦$

$\sqrt{\frac{a+b}{2}}>0,\ \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}>0$ なので

$$\sqrt{\frac{a+b}{2}}-\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} \geqq 0 \quad \cdots⑧$$

よって　$\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geqq \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$ は成立する。　（証明終）

例7

（証明）

$$\left(\sqrt{\frac{a+b}{2}}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2 \quad \cdots①$$

$$=\frac{a+b}{2}-\frac{a+2\sqrt{ab}+b}{4} \quad \cdots②$$

$$=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{4} \quad \cdots③$$

$a>0,\ b>0$ より

$$\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{4} \geqq 0 \quad \cdots④$$

よって　$\left(\sqrt{\frac{a+b}{2}}\right)^2 \geqq \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2$　$\cdots⑤$

$\sqrt{\frac{a+b}{2}}>0,\ \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}>0$ なので

よって　$\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geqq \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$ が成り立つ。　（証明終）