数学②コース：数式を図で考えてみよう

数学科　　阿部　真由美　　十九浦　美里

1.　はじめに

今回は Proofs without words(Roger B Nelsen)をヒントに，数列の和を図で考える，というテーマでおこなった。パスカルの三角形の中に現れる数列から始まり，自然数の和，平方数の和，立法数の和などを和の記号 Σ も使いながら図を用いて考えた。最後に極限の考え方も紹介し，無限等比数列の和も求めた。参加者数は 3 年生 19 名で，4 名程度をグループとしてグループワークも取り入れた。

2.　授業の内容

① 数列の用語と記号

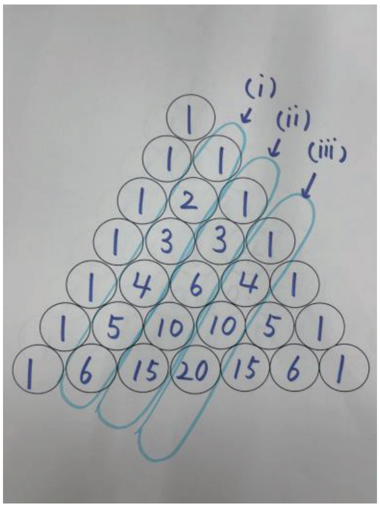
等差数列，等比数列，フィボナッチ数列や有限数列の例として 28 の約数を並べた数列など，具体的な数列の途中を虫食いにした形で黒板にかき，何の数が入るか考えてもらった。
答え合わせをしながら，「初項 a_1」「一般項 a_n」,「 数列$\{a_n\}$」，などの用語，記号を紹介した。

② パスカルの三角形の中にある数列

パスカルの三角形を第 7 段あたりまで作り（【図 1】)，そこに現れる数列を確認した。

(i)　自然数の数列
(ii)　三角数の数列
(iii)　四面体数の数列

なぜ三角数，四面体数というのかについても補足しながら紹介した。



【図 1】パスカルの三角形

③ ②の(ii)三角数の数列$\{1, 3, 6, 10, 15, 21, \cdots\cdots\}$について考察する。

この数列を　$\{a_n\}$　とおくとき一般項a_nを求める。

$$a_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

つまり，第 n 項は,自然数 1 から n までの和の形で表すことができる。

$$a_n = 1 + 2 + 3 + \cdots (n-1) + n$$
$$a_n = n + (n-1) + \cdots + 3 + 2 + 1$$

両辺たすと,

$$2a_n = n(n+1)$$

したがって

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \cdots (※)$$

ここで，和の記号　$\sum$（シグマ）についていくつか具体例を加えながら紹介した。

この　∑の記号を用いて，（※）は

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

と表すことができる。

④　②の(iii)四面体数の数列$\{1,\ 4,\ 10,\ 20,\ 35,, \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\}$について考察する。

　この数列を　$\{b_n\}$　とおくとき一般項b_nを求める。

$$b_n = 1 + 3 + 6 + \cdot\cdot\cdot$$

第 n 項は,三角数の数列の初項から第 n 項までの和となっている。

すなわち

$$b_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdot\cdot\cdot + a_n = 1 + 3 + 6 + \cdot\cdot\cdot\cdot + \frac{n(n+1)}{2}$$

b_nを∑を使って表すと

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} k(k+1)$$

∑の計算の性質や，和の公式を使えば，一般項b_nを求めることができる。

今回は，この一般項b_nを求めるところまでは扱えないが，その∑の計算をする際にも用いられる和の公式について話をした。

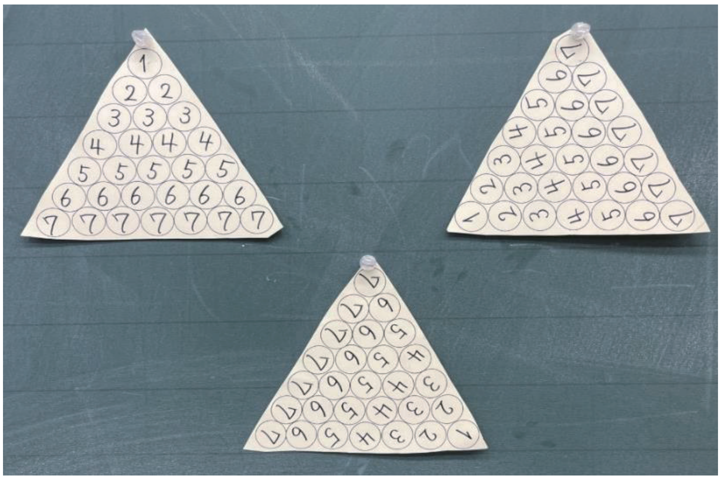
⑤　和の公式

●自然数の和　（③でみたとおり）

$$1 + 2 + 3 + \cdot\cdot\cdot\cdot + n = \frac{1}{2} n(n+1)$$

●平方数の和

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdot\cdot\cdot\cdot + n^2$$



【図 2　平方数の和】

　写真【図 2】のような数のかかれた〇でできた 7 段の三角形を考える。

n 段目には数 n が n 個かかれているので,

この 1 つの三角形にかかれている数の総和は

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdot\cdot\cdot\cdot + 7^2$$

この 3 つの三角形を 120 度ずつ回転し，同じ位置にある 3 つの数を足すと，その和は，どの位置も 15 である。

したがって,

$$3 \times (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdot\cdot\cdot\cdot + 7^2) = 15 \times (1 + 2 + 3 + \cdot\cdot\cdot + 7)$$

この考え方で第 n 段までの三角形で考えると

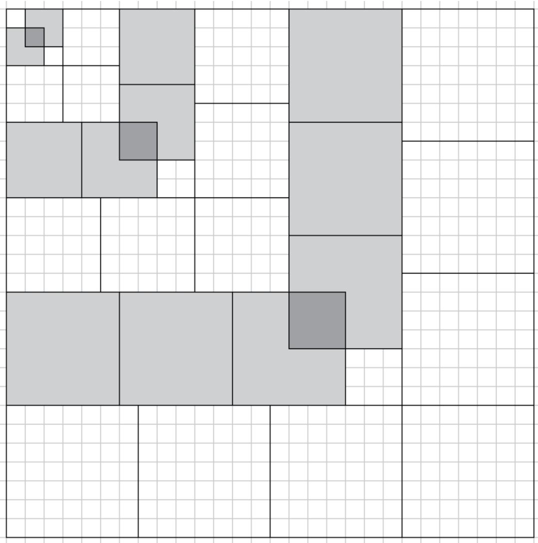
$$3 \times (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdot\cdot\cdot\cdot + n^2) = (2n+1) \times (1 + 2 + 3 + \cdot\cdot\cdot + n)$$

したがって次が成り立つ。

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

●立方数の和

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$$


【図 3　立方数の和】

１辺の長さが 1 の正方形を用いて，【図 3】のように正方形状に並べた図を用いて，証明を考えた。
図の見方は以下のようになる。
1 辺が 1 の正方形が 1 個→面積 1（1^3とみる）
1 辺が 2 の正方形が 2 個→面積の和$2\times2^2=2^3$
1 辺が 3 の正方形が 3 個→面積の和$3\times3^2=3^3$
・・・
1 辺がnの正方形がn個→面積の和$n\times n^2=n^3$
これらの正方形の集まりによって大きい正方形が埋め尽くされているから，大きい正方形の面積は

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3$$

と表される。一方，大きい正方形の 1 辺の長さは $1+2+3+\cdots\cdots+n$ であるから，大きい正方形の面積は

$$(1+2+3+\cdots+n)^2$$

となることから，図が立方数の和の公式の証明となっていることがわかる。

これらの公式を導いたことで，四面体数の数列（②ⅲで扱った数列）の一般項

$$\sum_{k=1}^{n}(1+2+3+\cdots\cdots+k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}k(k+1)$$

についても計算できることがわかる。本授業の中で計算はさせなかったが，計算して求められること，計算の方法は確認できた。

●分数式の和

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

の証明にも取り組んだ。

教科書などでは，恒等式（部分分数分解）$\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{1}{k(k+1)}$を利用して，

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{n+1}$$

と証明するのが一般的であるが,【図 4】を用いると次のように証明できる。

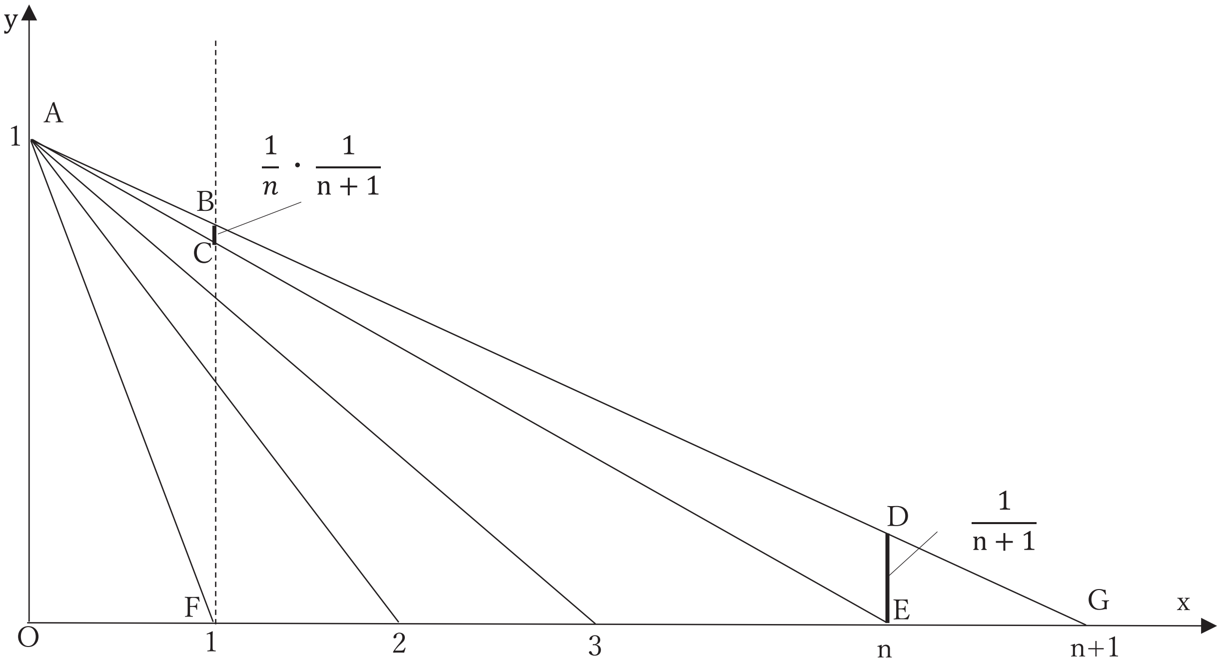
【図 4】の線分 BF を 2 通りの方法であらわすことを考える。△ABC∽△ADEであり，相似比が$1:n$であることから，BC=$\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}$　となる。この式のn を$1,2,3,\cdots\cdots,n$で置き換えた式は，2 点$(0,\ 1),(k+1,\ 0),(k=1,2,3,\cdot\cdot,n)$を結ぶ$(n+1)$ 本の線分が線分 BF をn 個に分割してできた線分の長さに対応する。したがって線分 BF は，和$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$　であらわされる。さらに線分 BF をnの式で表すと $\frac{n}{n+1}$ となるから，等式が証明された。

生徒には，BC の長さを相似の性質を用いてnの式で表す，というヒントを与え，BC の長さを求めさせた。あまり長く時間をとらなかったが，半分以上の生徒が求められているようであった。上記の方法で求めた生徒もいたが，別解として BF−CF＝BC という求め方をしている生徒もいた。ある生徒は，BF＝ $\frac{n}{n+1}$ ，CF＝ $\frac{n-1}{n}$は求まっていたが，$\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n}$ を通分することに気が付かず，$\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}$ と同値な式であることが確かめられずにいたが，通分するという方針を教えるとすんなり求めることができた。

さて，さらに与式の左辺について，$n\to\infty$（nを限りなく大きくする）とすると，

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$$

これは，図の 2 点$(0,\ 1),(n+1,\ 0)$を通る線分(直線)の傾きが，n を限りなく大きくすると，1 に近づくことからわかる。このことについても，生徒に問いかけたところ「1 に近づく」という返答があり，理解できていた。



【図 4　分数式の和】

⑥　無限等比数列の和（等比級数）

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=1\ \cdots\cdots①$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}\cdots\cdots+\frac{1}{4^n}+\cdots\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{1}{3}\ \cdots\cdots②$$

数列 $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\cdots\cdots$ について，比が一定（この場合は $\frac{1}{2}$）であるという規則性を確認し，その和がどんな値に近づくかを質問した。式だけを与えたのでは生徒からすぐには返答がなかったが，【図 5】を見せたところ，①式が成り立つことはすぐに理解できていた。

次に②式の左辺がどんな値に近づくかについて，【図 6】を見て考えさせた。時間も短かったため，生徒に解答させることができなかったが，次のような説明を行った。

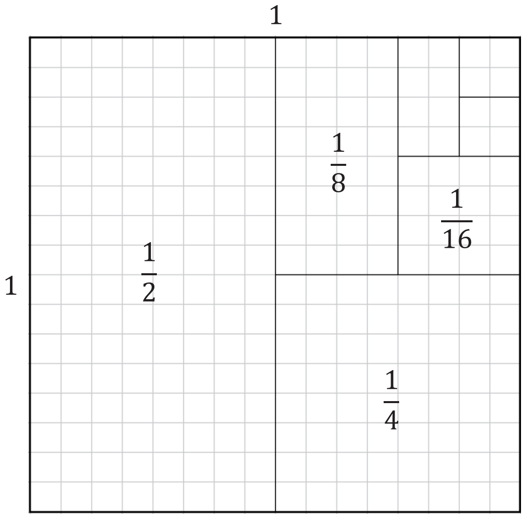
図中の陰のついている部分の面積の和が

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}\cdots\cdots+\frac{1}{4^n}+\cdots\cdots$$

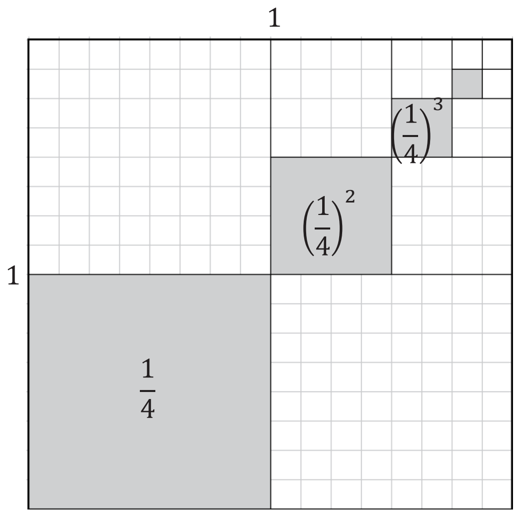
を表している。陰のついている一つ一つの正方形に着目すると，たとえば面積 $\frac{1}{4}$ の正方形は，陰のついていない部分に 2 つあるので，全部で 3 つある。面積$\frac{1}{16}$, $\frac{1}{64}$ ‥‥の正方形についても同じように 3 つずつあり，これら全ての正方形を合わせることによって面積 1 の正方形を埋め尽くしている。つまり，

$$3\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}\cdots\cdot+\frac{1}{4^n}+\cdots\cdot\right)=1$$

この等式の両辺を 3 で割ることにより，②式が得られる。この証明は，とても鮮やかで印象深かったようで，アンケートにも「感動した」との回答があった。



【図 5　①式の証明】

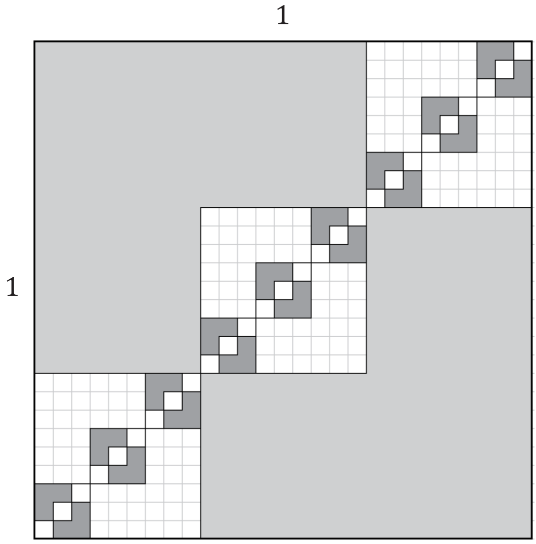


【図 6　②式の証明】

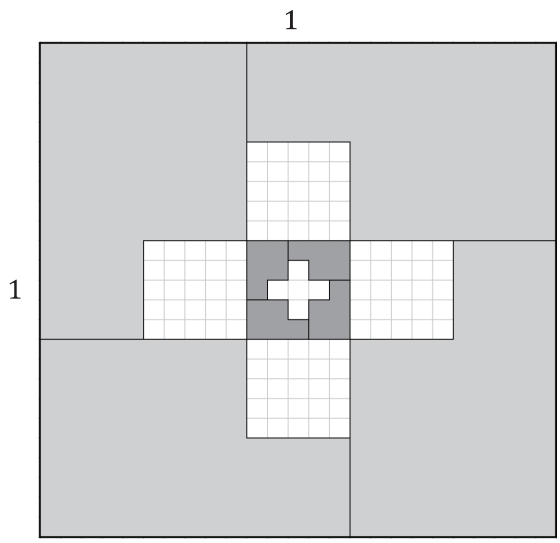
以下の③式，④式の証明については，説明する時間がなく，図と式を表すだけになってしまったが，興味を持った人も多く，黒板に書いた式をノートにメモしている生徒が多かった。式と図（【図 7】と【図 8】）のみを載せておく。

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}\cdots\cdot+\frac{1}{3^n}+\cdots\cdot=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{2}\cdots\cdot③$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}\cdots\cdot+\frac{1}{5^n}+\cdots\cdot=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n=\frac{1}{4}\cdots\cdot④$$



【図 7　③式の証明】



【図 8　④式の証明】

3. おわりに

中学 3 年生を対象とした授業ということで，中学で学習済みの内容を意識しつつ，高校で学習する内容にも触れ，少し背伸びすれば理解できるようなレベルまで扱うよう構成を考えた。数列の一般項を，文字を用いて表したり，数列の用語や記号についてもその場で教え使ったりしながら授業を進めた。規則性はそれほど複雑でなかったので，内容に関してはほとんどの参加者が理解できていたように思う。中学段階では文字の扱いに不慣れであることもあり，和を Σ を用いて表す場面では，手が止まってしまうなど，少し混乱している様子がみられたが，その都度，丁寧に説明し，確認しながら進めていった。アンケート集計からは「高レベルな内容だったが，中学までの知識で理解することができためになった。」という感想があり，難易度の設定としてはちょうど良かったと感じた。図を用いて証明したり，ほとんど説明が書かれていない図で表された証明を見て，その図が何を述べているか考えたりするというのは，普段の学校の授業で扱う教材と異なり，興味深く感じたようだ。「数学の新しい見方ができてより興味を持つことができた」「いつもとは違う考え方で考えることが面白かった」との感想が得られた。

参考文献

1）Roger B Nelsen ，*Proofs without words : Exercises in Visual Thinking* (MAA,1993)，pp.84-87, pp.118, pp.121, pp.122, pp.126

2）秋山仁，奈良知惠，酒井利訓　訳，「証明の展覧会I　Proofs without words by　Roger B Nelsen」，東海大学出版会，2002 年，114-119,163-166,168.