

数学①コース：特殊相対性理論

数学科 三橋 一行

〈キーワード〉中学生向け理数体験授業 特殊相対性理論 課題研究 総合学習

1. はじめに

今年度の数学①コースは、次のような内容で行った。

数学①「特殊相対性理論」(定員 20 名)

「光速不変」を基に推論すると、静止している人に対して等速直線運動で走っている電車内の時間は遅れ、空間は縮む。信じられなくても、それがこの宇宙の法則なのです。高校以降の学習は経験や感覚を基に進めてはいけません。仮説を基に論理を優先させるべきだという良い例なのです。三平方の定理を使って上のことを示してみます。時間があつたら質量とエネルギーの関係にも触れます。

なぜ、数学講座で特殊相対性理論を扱うかという点については、主に次の 3 つの理由がある。

① 実際の感覚よりも論理を重んじる体験をしてもらいたい。

高等学校からの数学は、実生活の経験よりも論理的正しさを優先することが多くなっていく。それを数学の学習内容で説明しても、難しくなるだけである。ところが、特殊相対性理論は我々の生活する時空についての理論であるが、時間が遅れたり、空間が縮んだりとはすぐには受け入れられない現象が発生する。それら乗り越えるには、経験に基づくことから感覚的に納得するのではなく、数学的論理を経験より優先して正しいと受け取り、むしろ自分の経験や感覚の方を修正するという、これまでにない体験をしなければならない。それによって経験より論理を優先する、今後の理数科目の学習に必要な態度を得る切っ掛けとしてもらいたい。

② 数学は、物事の説明に役立つ学問の「骨」であることを伝えたい。

つまり、数学は、情報学 (PC 関係)、物理学 (理科)、経済学、心理学、法学 (法律の論理性)、英語 (S+V+C など文法構造) など他分野で少なからず影響を及ぼしている。それは、数学が構造を示す学問だからである。その一端として、物理学への活用と応用を知ってもらいたい。

③ 単に授業者の趣味である。

自分が、高校 2 年生の時に、特殊相対性理論をかじって、まさに「目から鱗」の感じを得た。経験より論理を優先。「ありえない」といくら自分が思っても、論理的に整合性があればそちらの方を優先しなければならない。さもなくば、これまでの数学の方が間違っていることになって大変な事態になるからである。

こうした体験が、私の理数系科目の興味・関心をかきたてたので理数体験授業にふさわしいと考えた。

以上である。

2. 実際の授業

この授業のために作成し、実際に授業で用いたパワーポイントのスライドを以下に示しておく。授業内容とその流れがわかっていたらと思う。

①

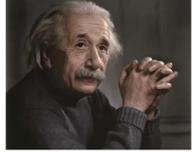
2022年度 理数一日体験授業 数学①
特殊相対性理論

お茶の水女子大学附属高等学校 数学科
 三橋 一行

④

アインシュタインについて

- 特許局につとめながら、自宅の部屋に籠って研究
- 2回も落第していた。12歳で、ユークリッド幾何学、微積分学は独学でマスターしていた。
- これまでの物理学を塗り替えた。
 ～物理学は完成まであと一歩のところだったが解決に取り組むと問題がどんどん。
 その解決に乗り出した理論。



アインシュタインの生い立ちについて。

②

なぜ、数学で物理(理科)の話をする・・・

- 数学は、物事の説明に役立つ学問の「骨」
- 数学は、情報学(PC関係)、物理学(理科)、経済学、心理学、法学(憲法と逮捕)、英語(S+V+C)
 → 数学は構造を示す学問。抽象論理体系
- STEAM
 数学は国語や英語などと同じく生活に必要な基礎能力。
- 物理学の問題を例にとって、数学の応用例、活用例を見ていく。

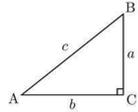
⑤

今回使う公式(定理)

- 速さの公式

$$(\text{速さ}) = \frac{(\text{距離})}{(\text{時間})}$$
- ピタゴラスの定理

$$a^2 + b^2 = c^2$$

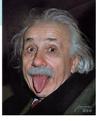


今回は、この2つの公式で理解に挑戦してみる。

③

特殊相対性理論とは

- 物理学者 アルベルト(アルバート)・アインシュタインがつくった理論
- 特殊相対性理論と一般相対性理論がある。
 特殊は等速運動をしているときの理論、一般は加速運動や重力を含めた理論
- これまでの物理学(ニュートン物理学)の概念を覆した(実際は、ニュートン物理学は相対性理論の近似的なもの)。



このスライドで、提唱者であるアインシュタインについて、業績を簡単に伝えた。

⑥

今回必要な2つの原理

- ① **光速不変の原理**
 どの慣性系(静止しているか等速直線運動している)から見ても光の速さは常に一定で変化しない。
 ※ マクスウェルの電磁方程式に光の速さが入っている。
- ② **特殊相対性原理**
 どの慣性系から見ても、物理法則は同じである。
 ※ 一定の速さで走る電車の中から外の景色を見ると自分が動いているか、景色が動いているのか判断できない。

説明抜きで受け入れなければならない2つの原理を紹介する。

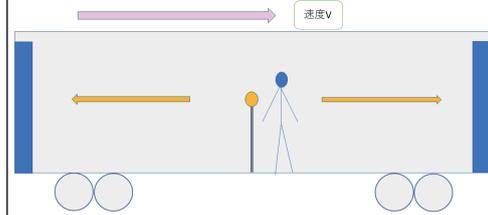
⑦

この先へ進む前に・・・

- ・見た目、感覚、直感ではなく、「論理」のみを信じる！それが、真の科学的思考。数学もおなじ。
- ・試しにテストしてみよう。いかにわれわれが感覚的に生きているかことか・・・。

⑩

同時の相対性① ～同時は同時ではない～



走っている電車の真ん中に光源を置けば、電車の両端のドアに光が届くのは同時である。ただし、それは電車に乗っている人に対してである。

⑧

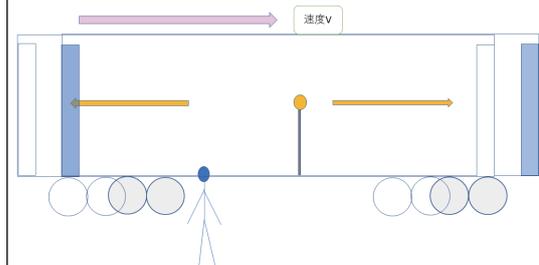
(問) 線分ABと線分CDでは、どちらが点を多く含んでいるでしょうか？



直観を覆して論理を信じなければならない例を出す。ABにもCDにも同じ数だけ点がある。ABの上の方に点P打ってCD上の点と直線で結んでみればよい。

⑪

同時の相対性② ～同時は同時ではない～



電車の外で、⑩と同様の現象を観測すると、なんと、後ろのドアに先に到達し、前のドアにはその後に光が到達する。同時かどうかは、現象を観測する場所(慣性系)で変わってしまうのである。

⑨

ポイント

- ・速さの公式

$$(\text{速さ}) = \frac{(\text{距離})}{(\text{時間})}$$
- ・(光の速さ) = $\frac{(\text{距離})}{(\text{時間})}$

光の速さが一定になるということは、時間と距離が変化するという事。

⑫

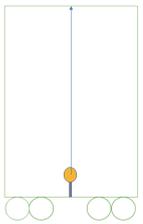
同時の相対性③ ～同時は同時ではない～

光速度不変の原理に従うと
 電車に乗っている人にとって、車両の前後のドアに光が届くのは同時であるが、地上から電車を見ている人にとっては、同時ではなく、後ろのドアに先にどとき、その後、前のドアに届く。つまり、同時かどうかは、見ている場所(慣性系)によって変わってしまうのである。
 これは時間に関することであるが、位置に関しては、手をたたいて、位置が同じかどうかを確認すれば、明らかである。

速さという概念は、時間と距離という2つの量から作られたものである。速さが一定で時間または距離が変化してしまえば、他方が変化せざるを得ない。このことを前もって知らせる。

⑬

時間のズレに関して①
電車に乗っている人の場合



光源から出た光が天井に届くまで、 T_A 秒かかったとする。高速を c とすると、光源から天井までの距離は、 CT_A mとなる。

今度は、電車の中と外で時間の進み方が異なることを示してみる。光源から出た光が天井に到達するまでの時間を考える。

⑯

時間のズレに関して④ . . . つまり . . .

光速は、この宇宙で最大の速さなので 殆ど $V < C$ であるので、

$$\sqrt{1 - \left(\frac{V}{C}\right)^2} < 1$$

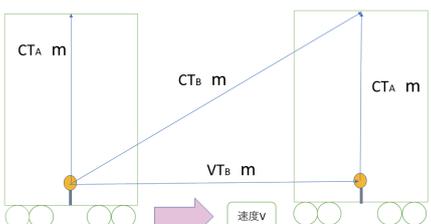
$$T_A < T_B$$

つまり、地上よりも電車内の時間の方が進み方が遅い。すなわち、運動している物体内の時間は遅くなる。

三平方の定理を利用してみると。電車の中の方が外に比べて時間の進み方が遅くなることがわかる。

⑭

時間のズレに関して②
地上に立っている人の場合



地上に立っている人にとって、電車内の光源から天井に届くまでの時間が T_B 秒かかったとする。

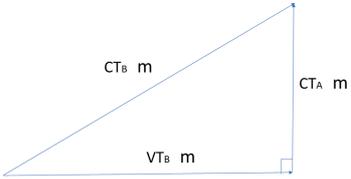
走っている電車内の光が進んだ軌跡と電車の外から観測した場合の光の進んだ軌跡を考えると直角三角形が現れる。

⑰

例 1 $V=0.8C$ とすると、地上での60分は、電車内では、何分になるか？

⑮

時間のズレに関して③
直角三角形ができました。



問 1
 T_A : 電車内の時間
 T_B : 地上での時間、ピタゴラスの定理を用いて T_A を T_B の式で表してみよう！

直角三角形のみに注目してみる。

⑱

距離の縮みに関して①
電車に乗っている人の場合



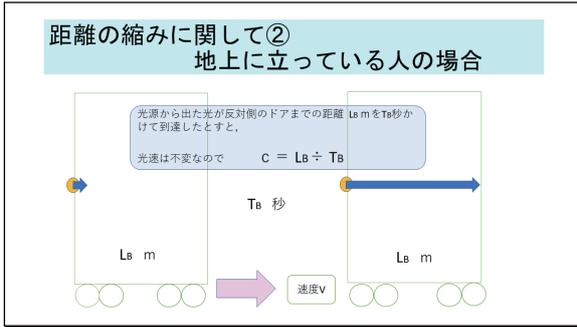
光源から出た光が反対側のドアまでの距離 L_A m を T_A 秒かけて到達したとすると、

光速は不変なので

$$c = L_A \div T_A$$

今度は、走っている電車の中と外では、距離に差が生じることを示す。左側のドアから光が出て、反対側のドアに到達する場合を考える。電車に乗っている人にとっては何ということはない問題である。

19



⑱と同様の現象を地上で静止して観測している人の場合で考える。電車の速度が加わるので、到達は遅くなる。

22

例2 $V=0.6C$ とすると、地上での1mは、電車内では、何mになるか？

20

$$C = \frac{L_A}{T_A} = \frac{L_B}{T_B}$$

問2
光速度が一定で不変であるので、こうなる。
C=の部分省いて等式変形する。
L_A を L_B の式で表せ。

ところが、光速不変の原理によって、上の等式が成り立つ。これを解くと・・・

23

- まとめると……
- 地上に対して、光に早さに近い速度で飛ぶ物体の内部では、
 - ① 時間が遅くなる。
 - ② 進行方向に対して距離が短くなる。
 ように、地上からは見える。
(本当にそうなっている)

21

距離の縮みに関して④ …… つまり ……

光速は、この宇宙で最大の速さなので 殆ど $V < C$ であるので、

$$\sqrt{1 - \left(\frac{V}{C}\right)^2} < 1$$

$$L_A < L_B$$

つまり、地上よりも電車内の距離の方が短くなる。すなわち、運動している物体内の距離は縮む。

地上の人に比べて、電車の中の人を観測する距離の方が短いことが示される。つまり、走る電車の長さは縮むのである。

24

- ミューオンの話
- ミューオンという粒子がある。ほぼ、光の速さで飛ぶ。宇宙空間に突然誕生し、すぐに消えてしまう。寿命、 2μ 秒、(マイクロびょう)つまり、100万分の2秒で消えてしまう。
 - 地上2万mで誕生しても、地上にやってくることはあり得ない。つまり、地上では観測されないはずである。が、地上に到達していることが観測されている。

②5

ほぼ光の速さだとすると、消滅までに飛べるのは、
 3.0×10^8 (m/秒) $\times 2.0 \times 10^{-6}$ (秒) $= 6.0 \times 10^2$
 (m) = 600 (m) 未満である。

ところが相対性理論によって

$$\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{0.9997}{1}\right)^2} = \sqrt{1 - 0.9994}$$

$$= \sqrt{0.00059991} = 0.02449306$$

(ほぼ, $\frac{1}{41}$)

②8

アインシュタインの式

$$E = mc^2$$

(エネルギー) = (質量) \times (光速)²

有名なアインシュタインの式である。しかし、このあたりは時間的にも内容的にも厳しくなってきたので、深入りは避けてこの式の不思議さを味わう時間とした。

②6

だから、

$$2.0 \times 10^{-6} = 0.02449306 \times (\text{地上から見た寿命})$$

(地上から見た寿命) は、

$$0.0000002 \div 0.02449306 = 0.000051655 \text{ (秒)}$$

$$= \text{約 } 8.2 \times 10^{-5} \text{ (秒)}$$

この間に飛べる距離は、

$$3.0 \times 10^8 \times 0.9997 \times 8.2 \times 10^{-5}$$

$$= 24.6 \times 10^3 = 24592.62 \text{ (m)}$$

②9

物理を学ぶには数学が大事。

- 一般相対性理論
重力、空間の歪み、ワープ航法、ブラックホール、重力方程式、ビッグバン・・・などへつながる。
- 量子力学
光の二面性、電子のスリット実験、多世界解釈、量子コンピュータ
- 宇宙論
ビッグ・バン理論、超弦理論、

②5と②6の計算から、本来、地上では観測されなはずのミュオンが地上で観測されることが証明された。特殊相対性理論が実験で確認される一つの例といえるだろう。

最後は、物理学と数学によって今後どんな話題が待っているかを知らせて終わる。

②7

質量とエネルギーの等価性

- 核分裂 → 軽くなる (質量は保存されない?)
→ 消えた質量はエネルギーに変換! (これをカウントすると粒子の数は不変である)
- 光速に近くなると物体の質量はどんどん重くなり、光速になった時、質量は無限大に重くなる。光速より早くすることは出来ない。
- 光速に達した物体は、どれだけエネルギーを加えても加速しない。そのエネルギーはどこへ行った? エネルギーが質量に変わった。
- つまり、「エネルギー」=「質量」なのである。

③0

<参考文献>

- 「相対性理論」
アインシュタイン 著 内山龍雄 訳・解説 (岩波文庫)
- 「アインシュタイン伝」
矢野健太郎 著 (新潮文庫)
- 「難しい数式はまったく分かりませんが、相対性理論を教えてください!」
ヨビノリたくみ 著 (SBクリエイティブ)

3. まとめ - 受講生の様子と今後の課題 -

前回に続き今回も中学校3年生の女子に限った。3年生であるので、みんな三平方の定理を学習しており、計算などは比較的順調にできていた。しかし、原理を信じたり、数式の正しさの方を優先するということは、日ごろ殆ど経験がない、むしろ現実合わなければ、方程式を立て直したり、「解なし」と判断しているので、現実合わない、経験に合わないことを式、論理の正しさを優先させて受け入れるというのはかなり厳しかったようである。身近なことでやったことがわかりやすいと考えたが、それは誤りで身近なものほど経験が強く働き、理論の理解を妨げていたようである。内容が多めであったので、もう少し内容を精選し、じっくり討論したり考えたりする時間を多めにとって、間にはさんでいくことを検討したい。また、理数の内容とは関係ないが、受講の動機として、「特殊相対性理論」に興味がある生徒ばかりではなく、本校の校内見学を兼ねて受講したという生徒が少なからずいた。この「一日理数体験授業」は、応募者が多く競争率が高い。そこで、興味・関心よりも、空いているところ、内容が難しそうで人気になさそうところを狙って希望して、受講を許可された生徒が少なからずいた。年々このタイプの生徒が増えているように思える。そのような目的で受講してもらっても良いが、それは、2次的なもので本来の興味ある講座を選択して申し込んでもらいたいと考える。本来の「一日理数体験授業」の設置の理由からもそれが正しい受講の仕方だと考える。

授業後の質問の時間には、授業内容に関する質問ではなく、校則や受験のこと、部活のこと学校生活のことについての質問ばかりであった。目的を違えて人生を送る癖をつけないことを切に願うばかりである。

入学後の進路選択にも大きくかわることだからである。

参考文献

アインシュタイン 内山龍雄 訳・解説 (1988) 『相対性理論』岩波文庫

矢野健太郎 (1997) 『アインシュタイン伝』新潮文庫

ヨビノリたくみ (2020) 『難しい数式はまったく分かりませんが、相対性理論を教えてください！』SB クリエイティブ