数学②コース：折り紙で数学しよう

数学科　阿　部　真由美
十九浦　美　里

1. はじめに

今回は授業時間 90 分の中で，折り紙を用いた 2 つの題材を扱った。前半では，折り紙を用いた白銀比および黄金比の長方形の座布団折りをテーマに，後半では，正五角形の一刀切りと三角比をテーマに授業を行った。中学 3 年生を対象としているため，中学での学習内容については予備知識を教えることなく授業を展開していけることを想定し，後半で高校数学の内容にも触れるように構成した。また，すでに学習済みの知識を使って，参加者が各自で考えたり，計算したりする時間をとるようにした。実施日の変更のため予定より当日の参加が減ったものの，3 年生 11 名の参加があった。

2. 白銀比と黄金比

黒板に正方形と 3 種類の長方形（縦と横の辺の長さの比が 1 : 2，白銀比，黄金比）を座布団折りした折り紙で提示し，どの四角形が好みか挙手してもらった。

投票数を黒板にかき，あとはその理由を隣同士で共有し，その後で，どのような特徴の長方形であったかを説明，前半は，白銀比と黄金比の長方形について考えるという目標を提示した。

①　白銀比の長方形

半分に折ると，元の長方形と相似の関係にある長方形

長方形の縦の長さを 1，横の長さを x とくと，

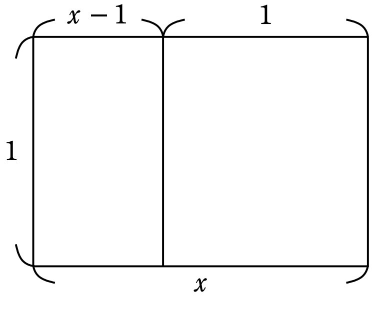
$1 : x = x : 1$

より，2 次方程式を立ててそれを解くと x が求まり，$1 : \sqrt{2}$ となる。

②　黄金比の長方形

（縦の長さ）:（横の長さ）$= 1 : x$（$x > 1$）

の長方形から，縦の長さ（一辺の長さが 1）の正方形を切り取ったときにできる長方形が，元の長方形と相似の関係にある長方形



このとき，　$1 : x = (x - 1) : 1$

$x(x - 1) = 1$

$x^2 - x - 1 = 0$

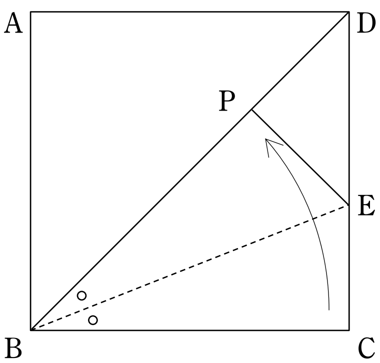
この2次方程式を解くと　$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

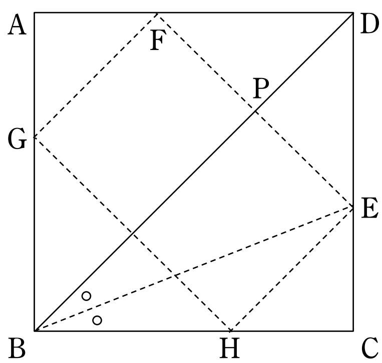
$x > 1$ より　$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

③　白銀比と黄金比の座布団折り

白銀比の座布団折り

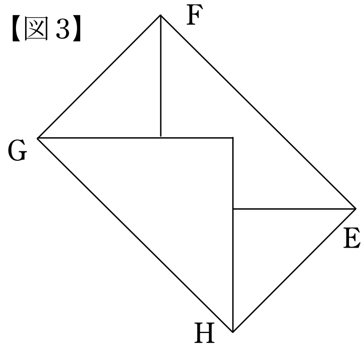
1ステップずつ，【図1】→【図2】→【図3】の流れで折り方を説明しながら，一緒に折っていく形で座布団折りを行った。全員が折れたことを確認した上で，紙を広げて，その折り図をもとに折った長方形座布団の辺の比が $1:\sqrt{2}$ （白銀比）になっているかを確かめていくという流れで進めた。

【図1】


【図2】


【説明の流れ】（記号は【図1】【図2】より）

BE は∠DBC の2等分線であるから，
角の二等分線と比の定理より
$CE : ED = BC : BD = 1 : \sqrt{2}$
△CEH，△DFE はともに直角二等辺三角形であるから，△CEH ∽ △DFE でその相似比は，
$BC : BD = 1 : \sqrt{2}$
したがって，それぞれの斜辺の比についても，
$EH : FE = 1 : \sqrt{2}$ であり長方形 FGHE は白銀比の長方形となる。

【図3】


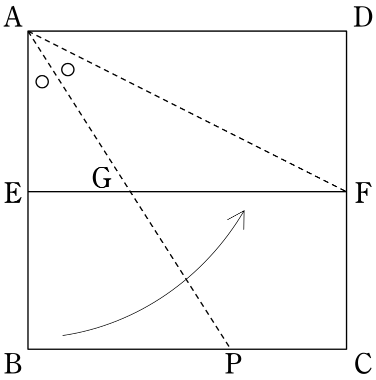
角の二等分線と比の定理はヒントとして与えが，その後は，試行錯誤しながら，それぞれ一生懸命考えており理解できいていたように感じる。

黄金比の座布団折り

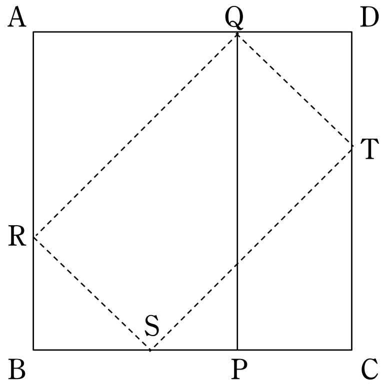
【図 4】→【図 5】の流れで，一緒に 1 ステップずつ折り方を確認しながら折り，長方形の辺の比が黄金比になっているのか確認してみよう，と提示した。

流れが 1 度つかめているので，すぐに折り図をみながら考える態勢になったが，白銀比の場合より難しいため，途中からヒントをだしながら，全体で進めていく形で進めた。

【図 4】



【図 5】



【説明の流れ】（記号は【図 4】【図 5】より）

AP は $\angle$ BAF の 2 等分線であるから，角の二等分線と比の定理より

$\mathrm{EG}:\mathrm{GF}=\mathrm{AE}:\mathrm{AF}=1:\sqrt{5}$ ………… ①

また，$\mathrm{EG}:\mathrm{BP}=\mathrm{AE}:\mathrm{AB}=1:2$ …… ②

①，②より，$\mathrm{EG}=1$ とおくと $\mathrm{BP}=2$ さらに，

$\mathrm{QD}=\mathrm{CP}=\mathrm{BC}-\mathrm{BP}=\mathrm{EF}-\mathrm{BP}=(1+\sqrt{5})-2=\sqrt{5}-1$

$\triangle$ DQT，$\triangle$ AQR はともに直角二等辺三角形であるから，

$\triangle \mathrm{DQT} \backsim \triangle \mathrm{AQR}$

その相似比は，$\mathrm{DQ}:\mathrm{AQ}=\mathrm{QD}:\mathrm{BP}=(\sqrt{5}-1):2=1:\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

よって，それぞれの斜辺の比についても $\mathrm{QT}:\mathrm{QR}=1:\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

したがって，長方形　RSTQ は黄金比の長方形となる。

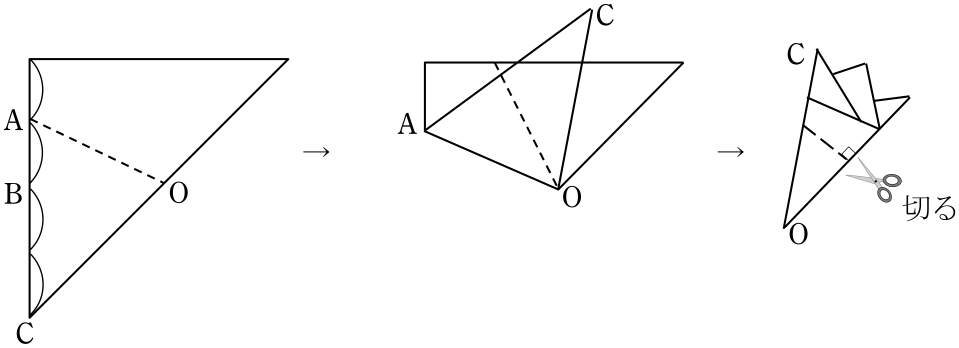
4. 正五角形の一刀切りと三角比

① 「一刀切り」について紹介。紙を折って 1 回はさみを入れることで，さまざまな図形（多角形）を切り抜くことができる，というのが一刀切りである。

一刀切りで「正五角形」を切り抜き，それを数学的に検証したい，という目標を提示。

② 折り紙を 2 枚用意し，2 枚とも「正五角形の一刀切り」の折図に沿って折り紙を折り，1 枚は実際にはさみを入れて，正五角形が切り抜けていることを確認する。中心 O の周りが 10 等分されているので，1 つの角が 36° になっているはず。

→ 【目標の確認】中心 O の周りが 10 等分されているのかを数学を用いて検証する。



③ 切ってない方のもう 1 枚の折り紙を用いて検証する。∠ AOC ＝ α として，$\alpha = 72^\circ$ となることがわかれば良いが,

$$\alpha = 45^\circ + \angle \mathrm{AOB}$$

であるから，直角三角形 AOB の鋭角∠ AOB が何度になるのかがわかれば良い。

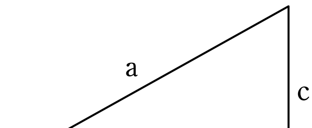
直角三角形 AOB の 3 辺の比は $1:2:\sqrt{5}$ であることは三平方の定理を用いれば求まる。鋭角の角度を求める手段がない（30° や 60° などの有名角ではない）ことを確認。

④ 三角比を紹介する。

1 つの鋭角が θ である直角三角形の辺の比を用いて $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の定義を確認。（$\tan\theta = c/b$ など）

さらに三角比の表を提示し，表の見方を確認。

この三角比の表を用いて∠ AOB の角度が求められないかを各自で考える。



⑤ ∠ AOB が求まった生徒に発表してもらった。

〈生徒の発表内容〉

図から　$\tan \angle \mathrm{AOB} = 0.5$　となるから，表でタンジェントが 0.5 に近い値を探した。27° のタンジェントが 0.5095 とあるから，∠ AOB ＝ 27° とわかる。

⑥ 黒板の図を用いて，全体で確認する。

tan 27° はちょうど 0.5 ではない（実際は表の値も近似値）ので厳密には

$$\angle \mathrm{AOB} \fallingdotseq 27^\circ$$

したがって

$$\alpha = 45^\circ + \angle \mathrm{AOB} \fallingdotseq 45^\circ + 27^\circ$$

すなわち

$$\alpha \fallingdotseq 72^\circ$$

⑦　このことから，この折り方での一刀切りは厳密には正五角形ではないが，かなり良い近似となっていることがわかる。

最後に，厳密に正五角形が切り抜ける折り方を紹介して終了。

5. おわりに

今年度は，進度や難易度も中学3年生の既習内容を踏まえて設定をしていたが，参加者も根気よく取り組み，計画した内容をほぼやりきることができた。相似や三平方の定理，角の二等分線と比などをはじめとした平面図形に関する基本的な性質，2次方程式の解の公式など，課題を考えるための知識が参加者に備わっていたことで，「紙を折る」ことによる図形的な性質をスムーズに理解することができ，折り目によってできた図形から性質を読み解いていくといった，普段あまり学校の授業では扱わない題材に対して，課題を考えることに集中できたように感じた。事前に興味のあるテーマとして本講座を選択して参加していると言うことも大きかったように思う。参加者の感想では，少し難しかったが少し頑張れば理解できたので楽しめた，との声が多かった。

【参考文献】

1）堀井洋子著「折り紙と数学のひろば」日本評論社
2）吉田稔　飯島忠編集「心を揺する楽しい授業　話題源数学　上」p153 東京法令出版