数学①コース：ハイレベル数学をさら〜っと！

数学　三　橋　一　行

1. はじめに

今年度の数学①コースは，次のような内容で行った。

「数学①コース :『ハイレベル数学をさら〜っと！』（定員 16 名）

＜問 1 ＞　罹患率 0.01％の感染症に対し，98％の確率で陽性が判明する検査がある。もし，A くんの検査結果が陽性ならこの感染症に罹患している確率は？

＜問 2 ＞　「1 ＋ 1 ＝ 2」を証明せよ。

＜問 3 ＞　2000 の 2000 乗を 12 で割った余りを求めよ。

これらの現実的, 哲学的, 受験問題的な問いに対して, 少しだけ（？）背伸びした公式, 公理，定理を使って，みなさんと一緒に解いてみます。今後の人生に役立つこと間違いなし！？」

＜問 1 ＞はベイズの定理を用いて解く問題であり，最初の直感を裏切る結果となる。その原因を考え現実にこういった状況になった場合，数学的に冷静に考えてみる必要があることを体験できるだろう。＜問 2 ＞はペアノの公理に基づいて証明することになる。証明自体は非常に簡単である。しかし，受講生にとっては自然数は当たり前なものとしてとらえられているので，その自然数さえ公理として厳密に定義していかないと証明ができないのである。また，証明ができることとその内容が理解できるということは別物であることを体験してもらうことになる。＜問 3 ＞は合同式の法則を学び即応用してもらう体験をすることになる。

数学の問題として，解決への意欲を高めるには，

①　日頃の生活に関係する身近な問題

②　誰もが知っているものでもその理由を改めて問われると疑問が生じてしまう問題,

③　これまでに数学の問題を解く過程で悩んだことがある問題

などの要素を含むものが効果的であると考える。今回の問題はこの点を考えて選出している。なお，今年度も「一日理数体験授業」は夏休みの終わりごろに開催するよていであったが，COVIT19 による感染症予防のため，12 月に開催時期を遅らせ，参加対象も「中学 3 年生の女子」（これまでは, 1 〜 3 年までの中学生女子が対象）となり，学力差がかなり狭まったので授業は行いやすいものとなった。

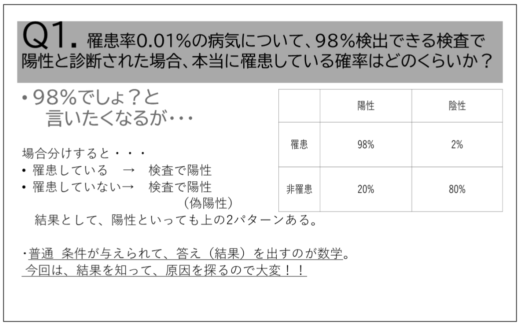
2.　実際の授業

授業で用いたパワーポイントのスライドを以下に示し，授業ごとにコメントを述べ

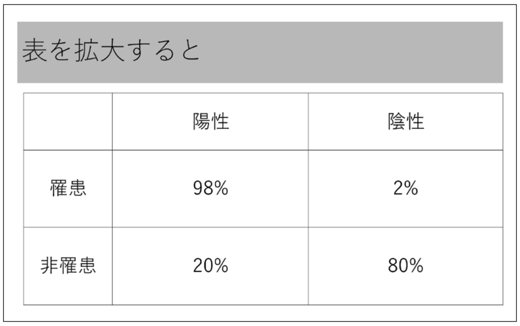
ておく。

スライドは抜粋である。各問題を提示したあと，個人で考える時間を用意した。また，穴埋め形式で，ヒントを与えるスライドも用意していた。

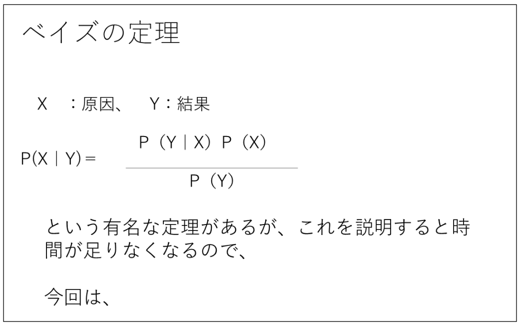
①



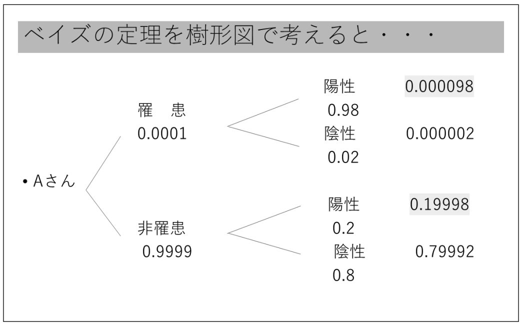
②



③

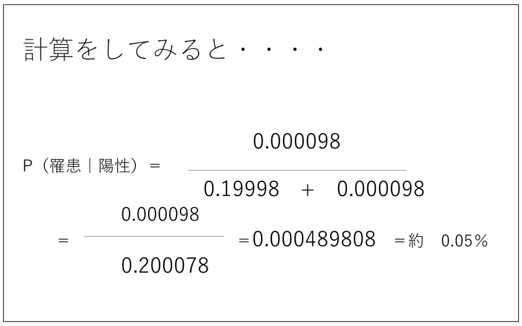


④



⑤

⑥



＜Q1 のコメント＞

④のスライドにある通り，ベイズの定理は樹形図によってわかりやすく説明できることに気付いた。樹形図で表現できれば，中学生にとっても大変分かりやすいものとなる。当日は式による説明も行ってみたが，理屈はわかるが，釈然としない様子であった。樹形図で説明すると，わかりやすくなり，信じられない結果になっていても，考

え方は正攻法で単純なものであることが理解できたようである。つづいては，1+1 = 2 の証明である。

⑦

Q2. 1+1=2 を証明せよ。

①証明が出来てもすっきりはしない。
「証明」と「理解」は別物。
②自然数って何？見たことありますか？
③加法って何？
④数学基礎論は難しい。

⑧

自然数の定義（ペアノの公理）

1. 自然数 0 が存在する。（最小元が存在。0も自然数に入れます！）
2. 任意の自然数 a には、その後者 (successor)、suc(a) が存在する（suc(a) は a + 1 の "意味"）。
3. 0 はいかなる自然数の後者でもない。（0 より前の自然数は存在しない）。
4. 異なる自然数は異なる後者を持つ：
   a ≠ b のとき suc(a) ≠ suc(b) となる。
5. 0 がある性質を満たし、a がある性質を満たせばその後者 suc(a) も
   その性質を満たすとき、すべての自然数はその性質を満たす。

⑨

（自然数の）加法の定義

① $a + 0 = a$

（演算の効果がないものが存在）

② $a + \mathrm{suc}(b) = \mathrm{suc}(a + b)$

⑩

1+1 = 2 を証明してみる！！

suc(0)＝1、suc(1)=2 と表すことにする。

$$
\begin{aligned}
1 + 1 &= \mathrm{suc}\,(0) + \mathrm{suc}\,(0)\\
&= 1 \quad + \mathrm{suc}\,(0)\\
&= \mathrm{suc}\,(1 + 0)\\
&= \mathrm{suc}\,(1) = 2
\end{aligned}
$$

（証明終）

＜Q2 のコメント＞

上の「1+1 = 2 の証明」は，証明自体の理屈はほとんどの生徒がりかいできていたようである。ただ，自然数を公理として厳密に定義することや，加法（足し算）とは何かなどきちんと約束されなければ，証明ができないということ。証明の理屈が理解できたとしても，それを受け入れられるかどうかは別物であるということを実感できたようである。

⑪

2000^{2000} を12で割ったときの余りを求めよ。

・2000年にW大で出た問題だそうです。
どうしますか？

⑫

「合同式」というのを使っちゃいます。

整数 a と b を 整数 m で割った余りが等しいとき，a**と** b **は** m **を法として合同**といい，

$$a \equiv b \pmod{m}$$

と表す。

⑬

合同式の便利な性質

mを法として
$a \equiv b$, $c \equiv d$, $a \equiv b$, $c \equiv d$ のとき,
次が成り立つ．ただし， n は自然数。
① $a+c \equiv b+d \pmod{m}$
② $a-c \equiv b-d \pmod{m}$
③ $ac \equiv bd$ (mod m
④ $a^n \equiv b^n \pmod{m}$

⑭

例題１　13^{100}を9で割った余りは？

（解）
$13 \equiv 4 \pmod{9}$
$4^3 \equiv 64 \equiv 1 \pmod{9}$
であるので、
$13^{100} \equiv 4^{100} \equiv (4^3)^{33} \cdot 4 \equiv 1^{33} \cdot 4$
$\equiv 4 \pmod{9}$

⑮

2000^{2000}を１２で割った余りは・・・・・・

$2000 \equiv 8 \pmod{12}$
$8^4 \equiv 64 \cdot 64 \equiv 4 \cdot 4 \equiv 16 \equiv 4 \pmod{12}$
$4^4 \equiv 256 \equiv 4 \pmod{12}$
$4^5 \equiv 1024 \equiv 4 \pmod{12}$
であるので、以上を利用すると、
$2000^{2000} \equiv 8^{2000} \equiv (8^4)^{500}$
$\equiv 4^{500} \equiv (4^5)^{20}$
$\equiv 4^{20} \equiv (4^5)^4$
$\equiv 4^4 \equiv 4 \pmod{12}$

＜Q3 のコメント＞

合同式は,高校１年生の数学Aの内容として扱われる。そういった内容であるためか,この問題が一番，受講生の喰いつきがよかった。すぐに合同式の定義・性質を利用できるようになった。深い理解はこの短時間で無理であると思われるが，例題を示した後はかなり思い通りに活用できていたようである。

3. おわりに

上で，紹介したスライドは，実際に授業で使用したもののうち説明にもちいたものである。実際は，この間に，問題の答えを得るために，穴埋め形式のスライを用意したり，配布プリントを利用して，立式，計算，答えの意味を考えるなどを促し，記入をさせた。

日頃の数学の勉強では，問題を解くことに限定して学習を進めている生徒が多かった。そのため，今回のように，普段より複雑な現実場面が出てきたり，まだ知らない数学の公式や思考の手順，数学の歴史に触れるなどして授業をすると,「これまでの数学とは全然違う」と感じるようである。アンケートや授業後の質問の様子からもそ

のような話が出てきていた。数学の学習は問題に取り組むことだけではない。しかも，受験勉強のようにパターンを身に着けて，それを活用して問題を解くようなものだけではないのだ。数学を日常のもの周りの問題解決のための道具の一つとすることもできるし，数学自体が時代とともに変化し進歩してきたのである。したがって歴史もあるし，色々な数学のアイディアを最初に見つけた人間もいるのである。そういったことも含めて，数学にかかわること全体を見ていくことは「本物の数学」を学ぶきっかけになったり，数学学習の動機の強化につながる可能性がある。

私自身はとしては「ベイズの定理を樹形図で説明できるのではないか」という仮説を見つけることができた。本当にすべての問題を解けるのかはわからない。しかし，これは，意外であった。また，樹形図にしてしまうと，状況がわかりやすくなったと同時に至極当たり前のことを計算していることがわかる。今後，研究を進めていきたいと考えている。