数学②コース：数を作図で考える！！

数学科　十九浦　美里

1. はじめに

今回は、「数」を作図を通してみることをテーマに、作図のお話（角の三等分などのギリシア三大作図問題など）も盛り込みながら授業を行った。

3 年生 1 8 名 , 2 年生 2 名の合計 20 名の参加があった。最初、隣同士で自己紹介をする時間をとり、分からないところは教えあうよう促しながら授業を行った

2. 授業の流れ参加者の活動

・数の分類について

自然数、整数、有理数、無理数、実数とは何かを確認し、歴史的背景にもふれながら数の分類について、演算との関係を考えながら整理していった。

高校ではさらに、虚数という数が登場し、数の世界が実数から複素数に拡張されることについても紹介した。

・ギリシア三大作図問題の紹介

1. 角の三等分問題
   与えられた角を三等分すること。
2. デロスの問題（倍積問題）
   1 辺の長さが 1 の立方体の 2 倍の体積をもつ立方体をつくること。
3. 円積問題
   半径が 1 の円と同じ面積の正方形をつくること。

・角の三等分の作図の間違い探し（一見作図できているよううで、できていない例をみせて、なぜてきていないのかを考え指摘する。）

・2000 年以上未解決であったこの三大作図問題の突破口は、幾何の問題を代数の世界で考える（抽象代数学）という発想であった。

⇒　この発想がどういうことなのかを体験しよう。

作図できるかどうかが、ある数を作図できるかどうかに帰着する。

例：倍積問題 は $\sqrt{\pi}$ が作図できるか否かに言い換えられる。

⇒　作図できる数はどんな数であるかを考える。

・作図のルールの確認

以下３つの作図のルール（ユークリッドの原論より）を確認した。

① 定規は異なる２点を結ぶ線分及び直線を描く。（目盛はつかわない。）

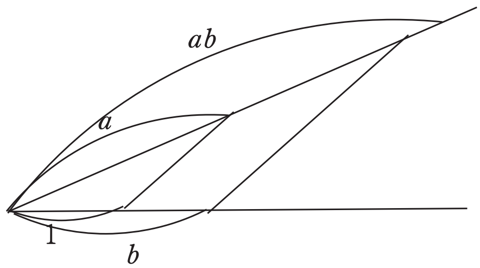
② コンパスは与えられた点を中心として与えられた長さを半径にもつ円を描く。

③ 手順は有限回

作図１

ワークシートに異なる２つの数 a, b の長さをもつ線分を作図し、そこから和 $a+b$, 差 $a-b$, 積 ab, 商 $\dfrac{a}{b}$ の長さをもつ線分の作図を考える。

和と差については容易に考えることができるが、積と商については単位１の長さの線分が必要であったり、２本の線分を考え、比例を利用するなど直感的にはいかなくなるため、考える時間を十分にとり、机間巡視などをしながらヒントをだしていくようにした。3, 4 名できてきたところで、積と商についてはそれぞれ黒板にでてきて発表してらった。



発表を聞くと多くの生徒が理解できたようであったが、わからない場合は、隣同士で教えあっている様子もみられた。

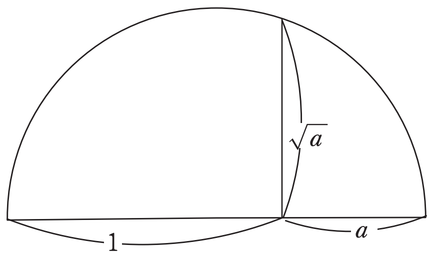
考察１

２つの数の和・差・積・商の作図ができる⇒ 正の有理数の長さは作図できる。

作図２

$\sqrt{a}$ の作図の紹介

この作図については、作図方法を先に紹介し、どうして $\sqrt{a}$ の作図になるのかについて考えることにしたが、時間が足りずに一緒に導いていく形で説明を行った。



考察２

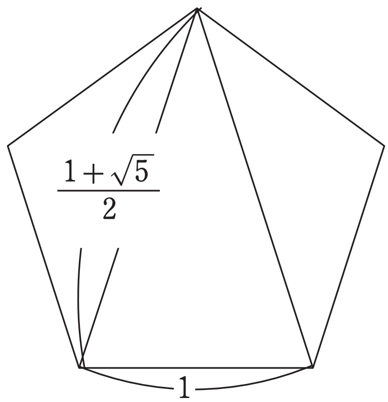
与えられた数の平方根の長さは作図できる。

考察１、２より、正の有理数、平方根の長さをもつ線分は作図可能

例　正五角形の作図

正五角形の１辺の長さを１としたとき、

$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ の長さの線分が作図できれば、正五角形が作図できる。（右図より）今までみていきたことからこの数は、作図できる数であるから作図可能。



・ギリシア三大作図問題について（お話として）

正五角形の作図と同じように、デロスの問題は $\sqrt[3]{2}$ 円積問題は $\sqrt{\pi}$ の長さの作図ができるかどうかという問題に帰着することになることの説明。

（角の3等分問題は $\cos\theta/3$ の作図に帰着するが、これについては、三角比なども含まれてくるため説明は省いた。）

⇒ $\sqrt[3]{2}$ $\sqrt{\pi}$ は、作図不可能な数であることがそれぞれ示され、作図は不可能であるということが証明された。

５．最後に

中学校で数学を学ぶ際、単元ごとに独立させて学習する生徒が少なくない。ある意味、毎単元新しい気持ちで臨めるという利点もあるのかもしれないが、これまでの学習とどうつながっているのかを考えることの面白さも大切である。

今回は、「数」と「図形」を結びつけて考えるという新しい視点を体験してもらうことをねらいとした。

授業後のアンケートには、今まで考えたことがなかった内容でたくさんの発見があったと同時に、これまで算数・数学で学習してきたことの奥深さを感じたという記

述が多くみられた。

図形（幾何）と数（代数）をつなげて考えることで､解決するこの作図不可能問題は、問題のわかりやすさもあって、非常に面白い題材である。対象が中学生であることもあり、今回はこの問題がどのように証明がされるか、そのアイディアの面白さを感覚的にでも理解してもらえれば、と考えて授業をおこなった。

高校生には、もう少し深入りをして話をしても面白い題材であり、機会があれば挑戦したい。