数学②コース：

折り紙で数学

数学科　阿　部　真由美
十九浦　美　里

1. はじめに

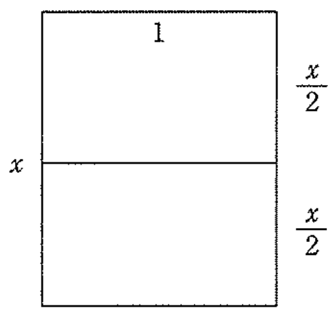
今回は、折り紙を用いて白銀比や黄金比の長方形を座布団折りするというテーマで行った。折り図に沿って折ったものが、実際に白銀比や黄金比の条件を満たしているかどうかを考えていった。1年生3名、2年生4名、3年生12名の合計19名の参加があった。1年生には少々難しい内容であったが、下級生は上級生と隣同士の席になるよう配慮し、分からないところは教えあうよう促しながら授業を行った。

2. 白銀比の座布団折り

① コピー用紙の縦の長さと横の長さの比が「白銀比」であることを紹介。

② コピー用紙を半分に折り、元の長方形と相似の関係にあることを確かめる。
（「相似」の定義に触れておく。）

③ 白銀比の具体的な値を求める。

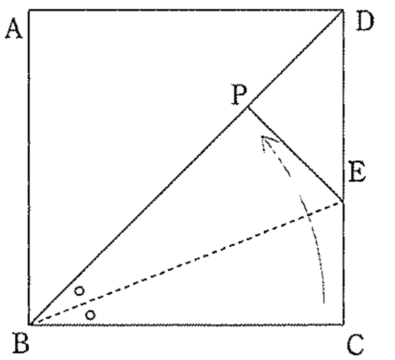


長方形の横の長さを1、縦の長さをxとおき、2次方程式を立ててそれを解くとxが求まり、$1:\sqrt{2}$となる。

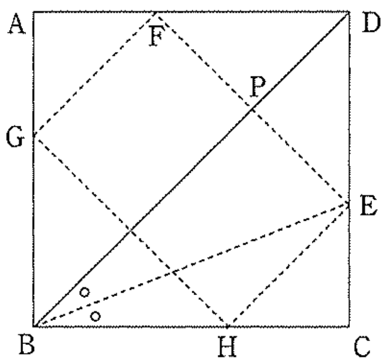
→　この際、「平方根」の定義をし、$x=\sqrt{2}$を導く。$\sqrt{2}$は、面積2の正方形の1辺の長さであることも図を用いて確認。この際、次に行う証明のヒントとして、「1辺が1の長さの正方形の対角線の長さ（直角二等辺三角形の斜辺の長さ）は$\sqrt{2}$であること」も確認した。

④ 折り紙で$\sqrt{2}$長方形の座布団折りをする。

まずは折り図（下図1～3）に沿って折り紙を折り、その後、折り図をもとに長方形座布団の辺の比が$1:\sqrt{2}$となる証明を考えさせた。



【図1】



【図2】

生徒考えた証明は主に以下の2つであった。

【証明1】

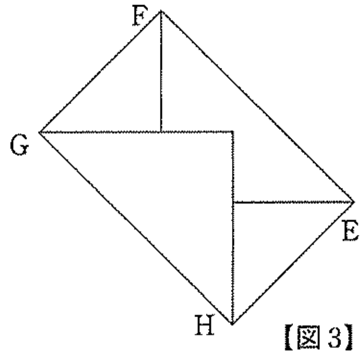
EC ＝ 1とする。

EC ＝ EPであるから、EF ＝ 2EP ＝ 2

また、△CEHは直角二等辺三角形だから

EC : EH ＝ $1 : \sqrt{2}$　したがって

EH : EF ＝$\sqrt{2} : 2 = 1 : \sqrt{2}$　（証明終）



【図3】

【証明2】

BEは∠DBCの二等分線だから、

角の二等分線と比の定理より

CE:ED ＝ BC:BD ＝ $1 : \sqrt{2}$

△CEH、△DFEは直角二等辺三角形だから

EC:EH ＝ $1 : \sqrt{2}$、ED:EF ＝ $1 : \sqrt{2}$

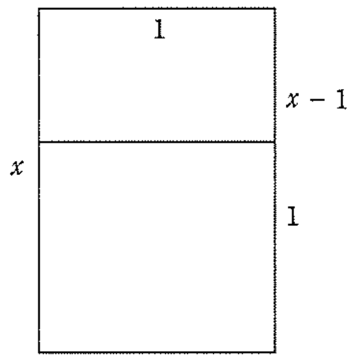
したがって、EC ＝ 1とすれば、EH ＝$\sqrt{2}$、ED ＝$\sqrt{2}$　EF ＝ 2　となるので

EH : EF ＝$\sqrt{2} : 2 = 1 : \sqrt{2}$　（証明終）

3. 黄金比の座布団折り

① 折り図をみて、まずは黄金比の座布団折りを行う。

② 折った座布団をみながら、黄金比の長方形の性質を紹介し、その相似の関係をまずは感覚的に確認した。



③ 長方形の短い辺を1、もう一方をxとして、長方形の相似の関係から、二次方程式をたて $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ を求めた。その際に2次方程式の解の公式を使うが、1，2年生は解の公式をまだ習っていないため、紹介しそこに代入して求める形をとった。

④ 折った座布団が本当に黄金比の長方形になっていることの証明を考えさせた。残り時間と難易度が高いことから、途中（以下に示す。）までは黒板を使って一緒に考えていく形をとり、その先を考えさせた。

【黒板を使って考えた部分】

$AE = 1$としたときに、$AF = \sqrt{5}$、

APは∠BAFの2等分線だから、角の二等分線と比の定理より

$AE:AF = EG:GF = 1:\sqrt{5}$

そこで、EG=1とすると、BP=2となる。

【生徒の証明】

$AQ = BP=2$

△ARQは直角二等辺三角形だから

$AQ : QR = 1 : \sqrt{2}$より$QR = 2\sqrt{2}$

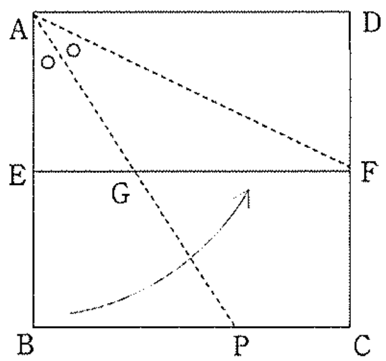
$EF = AB = 1+\sqrt{5}$より、$BR = AB - AR = \sqrt{5} - 1$

△BRSは直角二等辺三角形だから

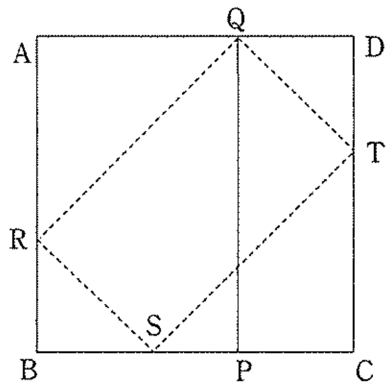
$BR : RS = 1 : \sqrt{2}$より$RS = \sqrt{2}(\sqrt{5} - 1)$

したがって　$RS : RQ = \sqrt{2}(\sqrt{5} - 1) : 2\sqrt{2} = (\sqrt{5} - 1) : 2 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} : 1$

⑤　このあと、3年生は $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} : 1 = 1 : \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ を導けるが、1，2年生は平方根の計算が難しいため、最初に黄金比の長方形の長い方の辺を1としたときのもう一方の辺の長さを二次方程式をたてて求め、証明ができていることを確認した。



【図1】



【図2】