

数学②コース 「不動点の秘密」

数学科 内藤 まり
阿部 真由美

1 はじめに

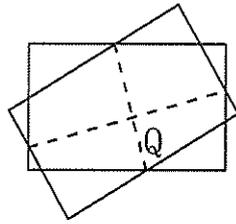
西山の定理（エレガントな不動点の作図法）からヒントを得、幾何学的な美の根拠を探求してほしく、授業を試みた。おおまかな流れ、生徒の様子を以下に示す。

2 授業について

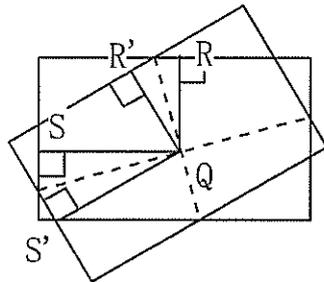
※書画カメラ、OHPシート、トレーシングペーパーを使用する。

授業の流れ	生徒の様子
<p>① ランダムドットが印刷された2枚の合同な正方形（ドットも重なる）をぴったり重ね、少しずつすと不動点が浮かび上がる（北極星のように）。このような点を、作図により見つけることが今日の目標である。</p>	<p>不動点に分かるランダムドット1000個を書画カメラで見せると皆興味深く見た。「連想するものは？」の問いかけに「星座」と答える。他のすべて（999個）の点が動いても動かない点として不動点を説明。</p>
<p>② 2つの長方形が離れた（重ならない）状態で、不動点（回転の中心）はどこにあるか考える。対応する点を結んだ線分の垂直二等分線の交点となる。 →「垂直二等分線」という考え方に気付けば十分。正確な作図はしなくてもよいが図の上で位置を確認。実際に不動点となっていることを確認して点を取る。</p>	<p>長方形の方が対応する辺がわかりやすいため、長方形で考える。回転の中心を予想するが、書画カメラで見えたはずの存在しない円の弦を、なかなか発想できない。コンパスで黒板に円をかくとやっと「弦」が、さらにかなり誘導してやっと「垂直二等分線」がでた。</p>
<p>③ 2枚の長方形A,Bが重なった状態のとき、不動点の位置を考え作図する。予め長方形Aを貼った印刷された紙と、合同な長方形Bを用いて、画鋏などを使って、実際にまわしてみ、不動点の位置を見つける。適当にやってもうまくいかない。②の考え方が必要なことを体感させる。</p>	<p>不動点を見つける難しさを画鋏を用いて画用紙上で体感。 2本の垂直二等分線の交点として不動点を画用紙上に作図。この作図が目標ではなかったのだが、ここできなり手間取る。作図した後実際に回転して重なることを確認。不動点の位置を長方形上に後の作業で使えるように記入。（この点をPとする。）</p>

- ④ 不動点を求めるための別解を、考えさせる。新たな紙（長方形 A が貼つてある）に長方形 B を③と同じ位置関係になるように写し考えさせる。気が付かなければこちらから提示。対応する辺の交点（各 2 点存在）をとり、向かい合った点を結んだ 2 直線の交点（Q とする）が不動点になる。



- ⑤ なぜ、④の方法で不動点 Q が作図できるか考えさせる。生徒の様子によって適宜、ヒントを与える。点 Q から対応する辺に下ろした垂線の足をそれぞれ S、S'、R、R' とおくと、点 Q と各点までの距離がそれぞれ一致し ($QR=QR'$ 、 $QS=QS'$)、対応する垂線の回転角が一致すること ($\angle RQR' = \angle SQS'$)、この 2 つが証明のポイントとなるので、確認する。



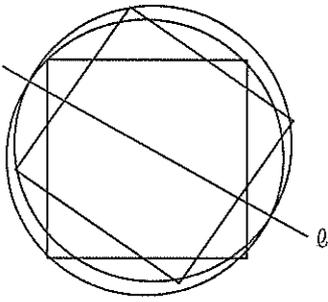
点 P と一致する Q を見つける方法を考えるわけだが、ヒントなしでは手がでない。平行でない 2 直線の交点として 1 点が定まることをいうと、何本も線を引き始める。どのような 2 直線の交点かを見つける作業である。

不動点候補を見つけては、回転させることを繰り返し、10 分ほどで 1 人（3 年生）が発見する。この生徒の図を書画カメラで全員にみせ、実際に 2 点 P、Q が一致することを確認。

この解法の方が楽であることも、実感。対応する辺の設定は 2 通りあるが、これは正方形で扱う際に考えることとする。

結論を示すには、まずどこを目標にするかを考えるが意見はでない。そこで、合同や相似になりそうな三角形を探して、自由に言わせてみる。玉石混交の意見を楽しむ。前へ出て発言する生徒もあった。直角三角形の合同条件、相似条件（未習生徒用には拡大・縮小）などを確認しながら、核となる部分は提示。

納得できたようだが、かなり疲れた様子なので、持ち帰り用に用意したランダムドットセット（正方形）を配布。実際に動かしてみるとまた元気が出た。このセットでさらに次のステップへの足掛かりとする。

<p>⑥ ⑥同様にして、2つの合同な正方形 C,D を用いて不動点を作図する。正方形の場合は、不動点が4点存在する。正方形 C,D の位置関係を同じにして、別の紙に作図させる。トレーシングペーパーを用いて、その4点を写し取る。4点の位置関係を見る。書画カメラを用いて生徒が作図したものを見せたかったが、時間の関係で予め用意したものを見せた。これらの4点を通る1本の直線がかける(直線 l とおく)。この直線は何を意味するか考えてみる。</p>	<p>対応する辺として、長方形と同様の位置関係しか発想できない。対応する辺のとり方をもう1つ示すと、あとの2通りもわかった。</p> <p>ここで、長方形の場合にもどり、不動点が2個あることを確認してから、正方形の場合を作図(直線を2本引くのみである)。対応の仕方によっては、辺を延長して交点を求めることが必要だが、ここも難しかったようだ。</p> <p>4点を目標時間内に仕上げた生徒はいなかった。各自確認することを指示。</p>
<p>⑦ 円がかかれた OHP シートを正方形 C の外接円となるように置き、⑥で求めた4点を回転の中心として回転させてみると、正方形 D の外接円になる。直線 l 上の別の点を中心に円を回転させても、正方形 D の外接円になることから、直線 l がどんな直線なのか想像させる。(授業はここまで)</p>	 <p style="text-align: center;">直線 l 上に不動点が並ぶ</p>

直線 l は、正方形 C,D それぞれの外接円の交点を通る直線となっている。2つの円は、互いに直線 l に関して対称である。したがって、対応する点は、直線 l 上の任意の点から等しい距離にある。

まとめ

予想以上に時間がかかったのは、垂直二等分線を引く作業であった。垂直を作る際に、作図と異なり三角定規を用いることも是としたが、それでも手間取っていた。実際に手を動かすことに慣れることへの大切さを感じた。

ランダムドットを見せることで、中学生にとっては難しい証明の後も、意気が上がって取り組んでいた。実感、体感の重要性を再確認した。