

数学①コース 「パズル ペントミノ」

数学科 三 橋 一 行

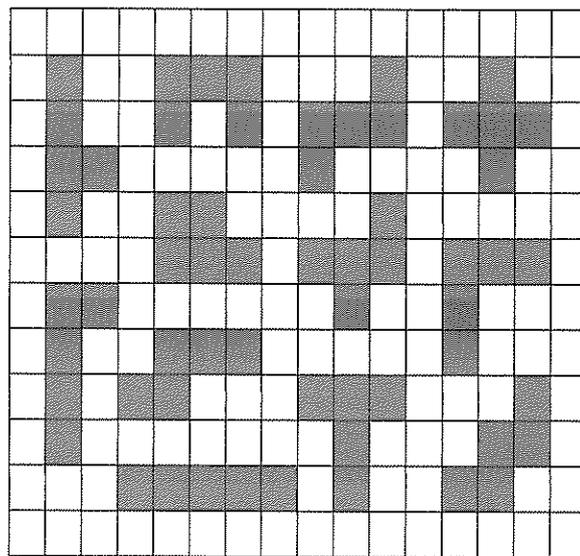
1. <はじめに>

中学生向けの理数体験授業において毎回頭を痛めるのは、中学校1年生から3年生までが1つの教室で学習するということである。個人的な数学の学力差もさることながら、学年差による既習事項の違いは大きな問題である。また、短時間で数学の面白さを伝えて、日頃の数学学習への興味・関心を高めようとするのは、かなり難しいことである。しかし、理数体験授業という機会をいただいている以上、困難と思われる課題にも果敢に挑戦して行かねばならない。そこで今回は、ペントミノというパズルを用いて、パズルのピースの形や解法について考えてもらい、その流れにそってコンピュータや数学のトピックを織り交ぜた授業に挑戦してみた。

2. <授業について>

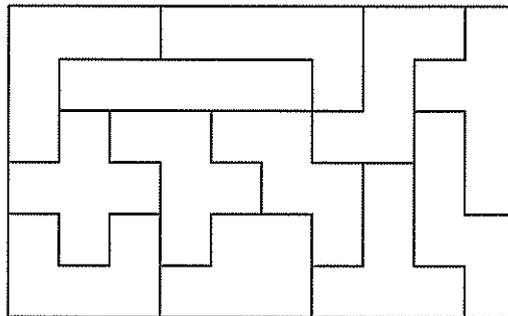
ただ、パズルを解くだけでは、授業にはならない。ペントミノについて調べてみると、その名が示すとおり、5つの正方形の組み合わせで各ピースが作られている。

テトラミノ（正方形4つ）、ヘキサミノ（正方形6つ）など、1つのピースに使用する正方形の数の違いによる類似のパズルもある。まず5つの正方形の組み合わせでどのような形があるかを考えてもらう。そして、それがもれなく見つかる（12種類ある）ペントミノのピースが誕生する。（下の図1）ただし、裏返して合同となるものは同一のものとする。



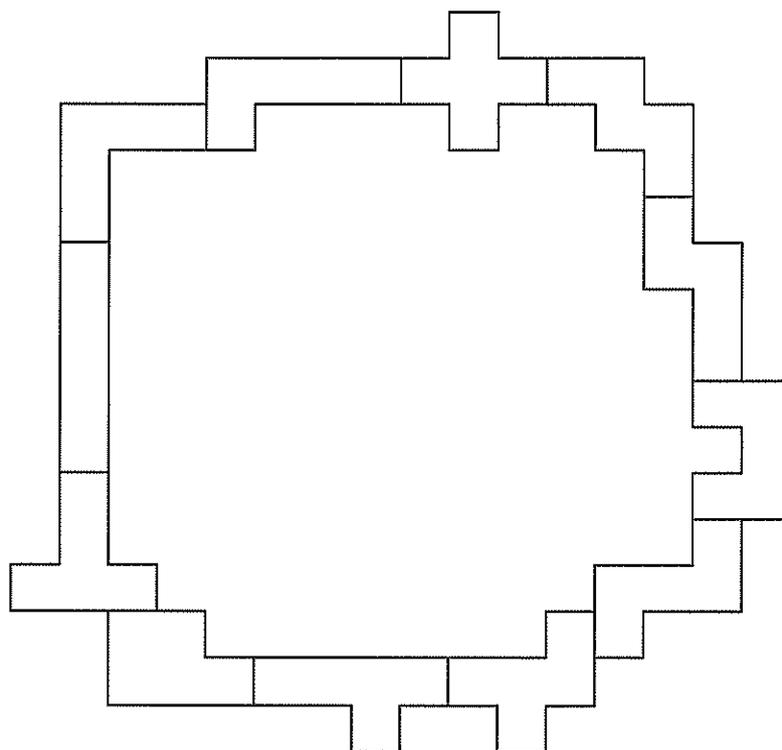
<図1>

今回は厚紙の方眼紙を用意し、そこに正方形の組み合わせを方眼のマス目を利用して描いてもらう。それを切り抜き、ならべてみるという活動にした。(今回はピースの色分けを行いたかったので、形が見つかった時点で、こちらの用意した色つきのピースと形を確認してもらい色付きの方を切り抜いてもらった) それらを組み合わせて長方形(正方形 $6 \times$ 正方形 10)を作る作業に入った。しかし、このパズルはなかなか難しく、途中で面積を考えると 60 (正方形 1 つの面積を 1 と考えている)だから、縦と横の組み合わせを考えると少しはヒントになることを伝えた。参加生徒のうち 1 人しか時間内(20分程度)には、完成しなかった。しかし、インターネットからダウンロードしたフリーソフトで、途中課程を見せながらペントミノを解いて解答を見せると、一見困難と思われるパズルが見事に長方形になっていることにみんな驚いていた。(下の図2が解答の1例である。)



<図2>

別解を提示しつつ、全部で何通りあるかも計算させてみた。すると解答が全部で 2339 通りあることに驚きがわき起こった。そんなにあるのに自力ではなかなか見つけにくいのである。そこで、コンピュータと数学に関して、PとNP問題やコンピュータ対人間のチェスの試合のこと等、関連する話題を紹介した。そして、これらの 12 種類のピースで輪を作ったとき、輪の中の面積が最大でいくつになるかを考えてもらった。最大面積は一時、 127 とされていたが、 128 のものがいくつか見つかっていて(図3)、これが最大であることが示されている。つまり面積 129 は存在しないことが証明されている(参考文献による)。このことから数学の問題を考えると、人の答えを鵜呑みにしない。自分でも確かめるなどの姿勢が大事であることにも触れ、また自分が正しくとも人には理解されないこともあることなどにも触れた。関連して数学者ガロアのトピックも紹介した。最後の困まれた部分の面積最大値問題は、難しいものであり時間切れとなったので答を伝えて、各自で考えてもらうことになった。



<図3>

授業後のアンケートからはおもに次のような感想があった。

- 普段学校では絶対に受けることが出来ないような授業でとても楽しかったです。あまり数学は得意ではないけれど、興味深い授業をやっていただき、他のパズルにも挑戦してみたいと思った。
- ペントミノから、他の例につながっていき、とても楽しく分かりやすい授業でした。
- コンピュータと人間についてや、まだ解明されていないことについて知れたので良かったです。家でもパズルをやって、解を何通りか見つけたいと思います。

3. <今後について>

良かった点と改善すべき点を以下のようにまとめてみた。

<良かった点>

- ① 操作活動をメインにすることで、理解と思考のメリハリが付き、分かりやすく考える授業にすることができた。
- ② 学問としての数学や数学者の話は、通常の中学校の授業ではあまり行われておらず、数学に関わった人間のドラマや数学の最先端ではどうということが考えられているかを紹介して、興味・関心を高められたようだ。
- ③ 作業とトピックを組み合わせると難しい数学も理解する意欲が高まる。それを利用して構成的に授業をデザインしていくということも考えられる。

<改善すべき点>

- ① パズルを紙ではなく、プラスチック製のものなどにする。
- ② 最後の輪で囲まれた面積の問題は面白いものであるが、難しいのもっと噛み砕き、中学生でも手に負えるようにする工夫が必要である。
- ③ 既成のフリーソフトではなく、エクセルなどを用いて自作できれば、そのアルゴリズム紹介することで、数学だけでなくコンピュータの授業として展開することも考えられた。
- ④ どうしても内容が盛りだくさんになってしまうので、精選する必要がある。

アンケートの感想にもあったように、興味・関心を高めることが出来たようだ。具体的操作を取り入れつつ数学の説明や数学史的トピックを織り交ぜていく手法は、このような単発の授業では特に効果をあげるものと思われる。この手法の研究を続け、日頃の授業にも取り入れていきたいと考えている。

(参考文献：「ルービック・キューブと数学パズル」 島内剛一 著 日本評論社)