

数学③コース「整数もんだい」

数学科 十九浦 美 里

1. はじめに

平成24年度から先行実施された数学の学習指導要領において、数学Aの学習内容に「整数の性質」が新たに加わった。整数は、中学生の生徒にとっては、どちらかといえば親しみのある数であろう。そこで、今回は、中学生を対象とするこの理数体験授業で、整数問題を扱ってみよう、と考えた。整数問題といっても、いろいろな話題がかんがえられるのだが、今回は、「ユークリッドの互除法」に焦点をあてて、授業を展開した。

2. 授業について

① 作業「長方形から最大の正方形を切り取る」

縦が10, 横16の長方形を(10,16)と表すとする。

$$(10, 16 - 10) = (10, 6)$$

$$\Rightarrow (10 - 6, 6) = (4, 6)$$

$$\Rightarrow (4, 6 - 4) = (4, 2)$$

$$\Rightarrow (4 - 2, 2) = (2, 2)$$

この作業を、(42,18)や(42,15)の長方形でも同じように作業をする。

② 作業をふりかえる。

最終的に残る正方形がもとの2つの数とどういう関係があるか?と質問

- ・作業を通して、最後にでてきた正方形の辺の長さが、最初の2つの数の公約数になっていることは納得できる。
- ・結果の値をみると、最大公約数になっていそうであるが、本当にそうなのかは確信がもてない。

③ 最大公約数になっているのか、を考える。

正の整数 a, b において

$a > b$ のとき、 a と b の最大約数と $a - b$ と b の最大公約数は等しい。…(イ)

(イ)が証明できれば、先ほどの作業で、長方形の2辺の長さの数の最大公約数が求まることがわかることを確認する。($a = b$ のときは省略。)

証明

a と b の最大約数を k とすると、

$$a = km, \quad b = kn \quad (m \text{ と } n \text{ は互いに素な正の整数で } m > n)$$

とおける。(互いに素に関しても授業の中で説明した。)

$$\text{このとき、} \quad a - b = k(m - n)$$

ここで、「正の整数 m と n は互いに素であるならば、 $m-n$ と n は互いに素である」(□)
(この証明もおこなったがここでは省略する。)
ことから、 $a-b$ と b の最大公約数は k である。
よって、 a と b の最大約数と $a-b$ と b の最大公約数は等しい。

④ 証明と作業を振り返って。

(*) の証明より、先ほどの作業が、長方形のたて、横の長さの 2 数の最小公倍数を求める作業になっていることを理解した。

さらに、

「正の整数 a, b において a を b で割ったときの商を q , あまりを r とすると
 $a = bq + r$, $0 \leq r < b$ が成り立つので、
 a と b の最大約数と r と b の最大公約数は等しい。」

この結果を使って、もう一度いくつかの 2 つの数の組の最大公約数を求めた。わり算の余りを利用することで先程よりも作業が短くてすむことがあることを実感する。この求め方を「ユークリッドの互除法」という、と紹介した。

3. 授業を終えて

証明をこの授業のメインにおき、1 つ 1 つていねいに進めていった。特に□の証明の理解には、時間がかかった。しかし、作業をとおして「自分たちで予想したことが正しいか、正しくないかを判断したい」という動機がしっかりとしていたことも助けとなり、全員が粘り強く取り組んでくれ、証明が完成したときは、教室が達成感につつまれていた。方法だけではなく、証明をきちんとするという体験を通して、数学の面白さも感じてもらえていたらうれしい。