中３卒業期の課題学習

立方体の切断について深く考察しよう

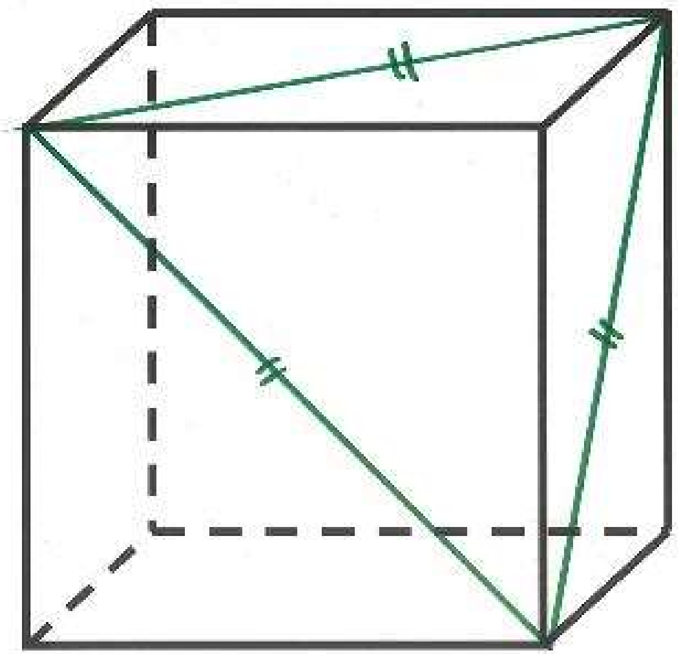
お茶の水女子大学附属中学校
藤原　大樹
（令和3年3月）

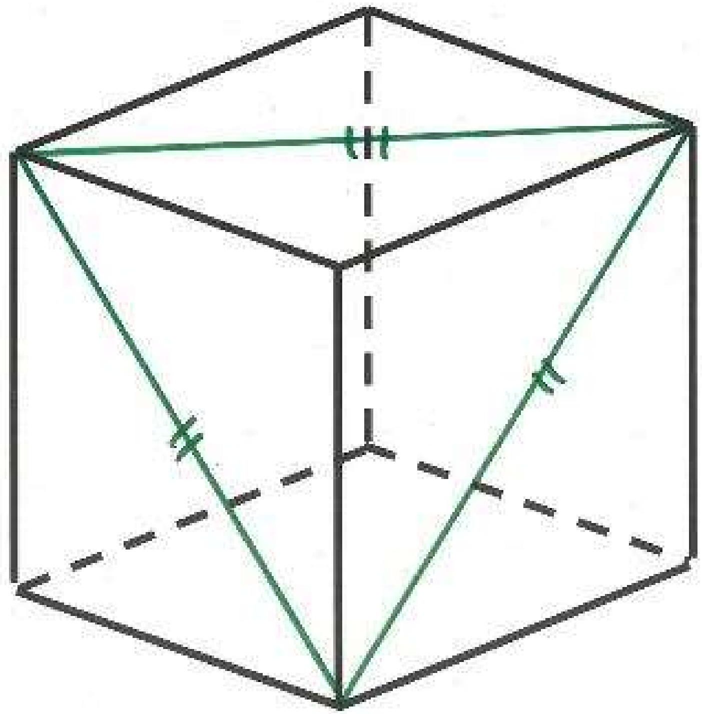
- 指導時期　　中３の卒業期（受験期）
- 指導のねらい　　立体を平面で切断したときの性質（切断面の図形，周の長さ，面積，その関係）について，領域横断的に，かつ複数の図を関連付けて考察し表現する力を高める。
- 指導の流れ　　前時まで：正四面体のねじれの位置にある２辺に平行な平面で切断したときの切断面の図形，まわりの長さ，面積について考察した。第1時：それを受けて，三角形，四角形，五角形，六角形などの各図形を班で分担し，「何を求めるか」などを問題を自ら作って，わかったことをA3用紙に個人または数名で整理する。第2時：次の時間にこれを黒板に貼り付けたり，その画像をGoogleクラスルームに掲載したりして共有し，意見交換した。ノートにはワークシートを貼り，考えたことや解釈したことを整理していった。第3時：第2時で盛り上がった問い，例えば一般の台形はできるか，正五角形はできるか，辺の中点以外を結んで正六角形はできるか，などを全体で取り上げ，皆で考えた。

- 以下，生徒の反応（２クラス分）と生徒2名のノートである。なお，いくつかのスライドには，閲覧する生徒に注目してもらうために「ホントかな？」を授業者が付けた。

切り口：正三角形

担当：





【気付いたことなど】

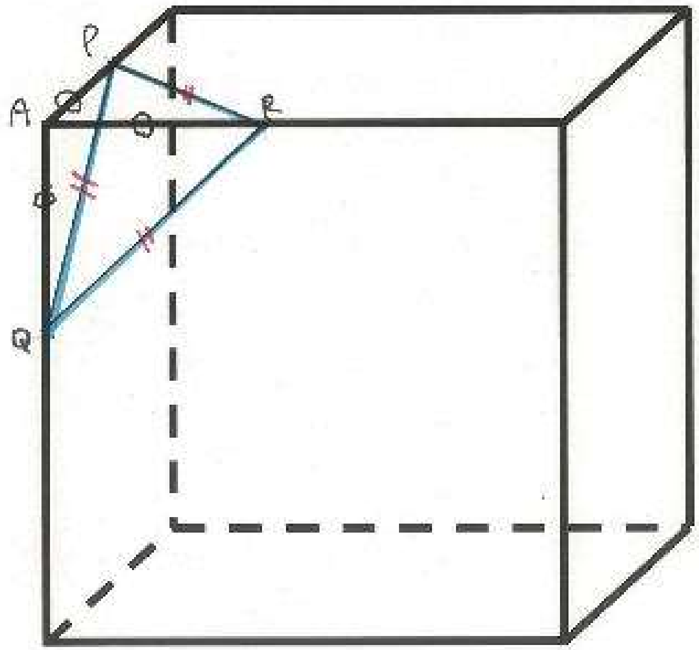
周の長さ…$18\sqrt{2}$ $(6\sqrt{2} \times 2)$

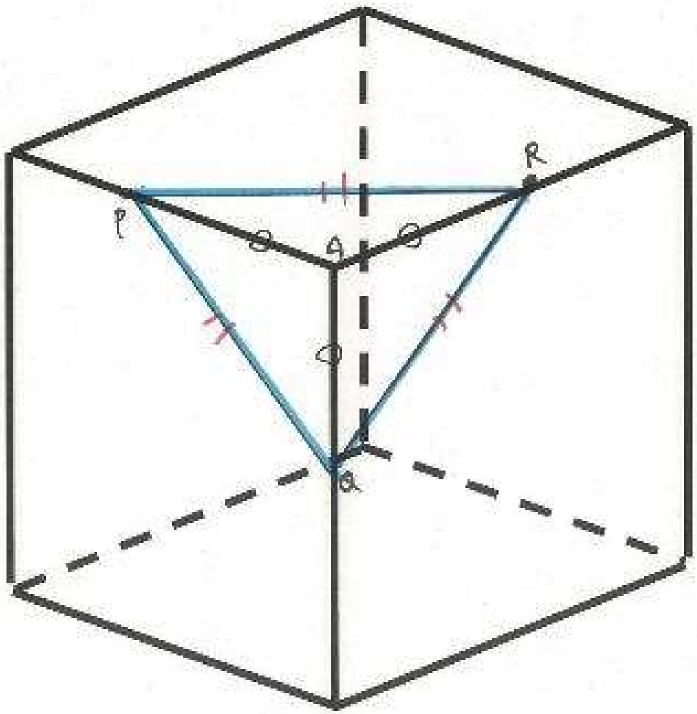
面積…$18\sqrt{3}$ $(3\sqrt{2} \times 3\sqrt{6})$

$\rightarrow 6\sqrt{2} \times \frac{1}{2} \times 3\sqrt{6}$

切り口：正三角形

担当：



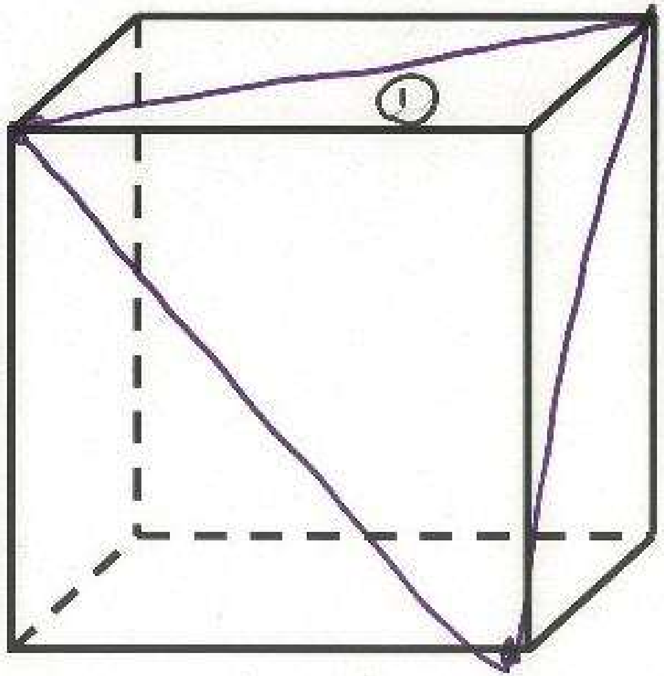


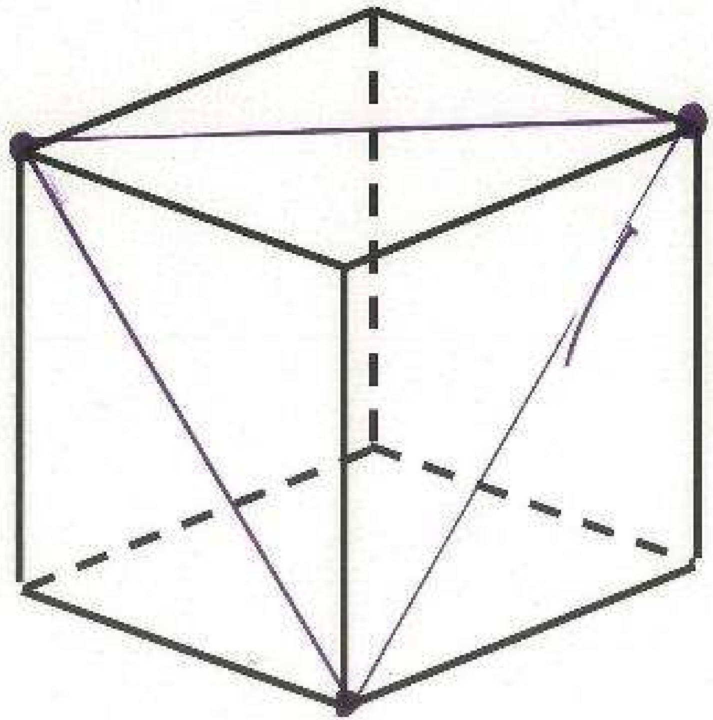
【気付いたことなど】

~~AP=AQ=ARの場合~~
~~PR=PQ=QR になるので~~
~~正三角形になる~~
~~PR:PQ:QR=$\sqrt{2}$:$\sqrt{2}$:$\sqrt{2}$~~
~~=1:1:1~~

AP=AQ=AR のとき
PR=PQ=QR になるので
正三角形になる
PR:PQ:QR=$\sqrt{2}$:$\sqrt{2}$:$\sqrt{2}$=1:1:1

切り口：　　　　　　　　　　　　　　　　担当：正三角形





【気付いたことなど】

① $= 6 \times 6 \times \frac{1}{2} = 18$ cm²

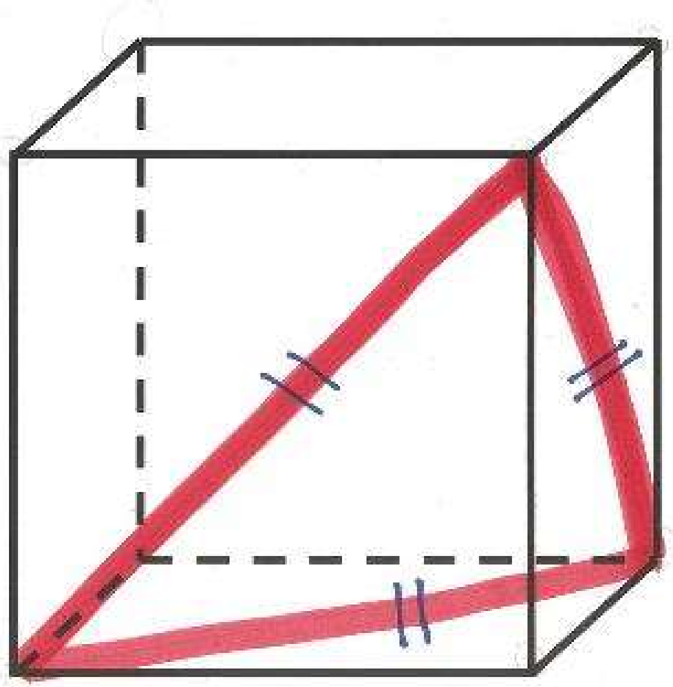
体積は $6 \times 6 \times 6 \times \frac{1}{3}$　36 cm³

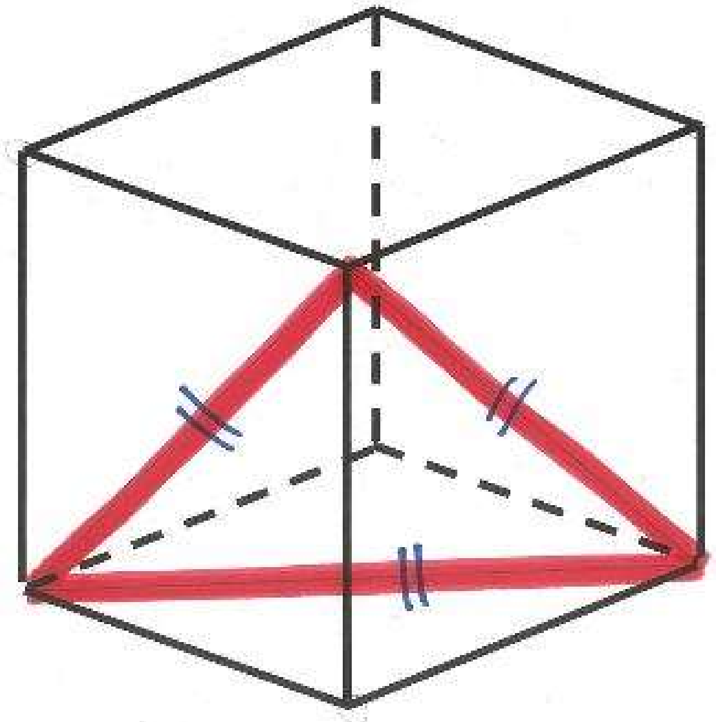
切り口の面積は $6\sqrt{2} \times 3\sqrt{6} \times \frac{1}{2}$

$18\sqrt{3}$ cm²

切り口：正三角形

担当：



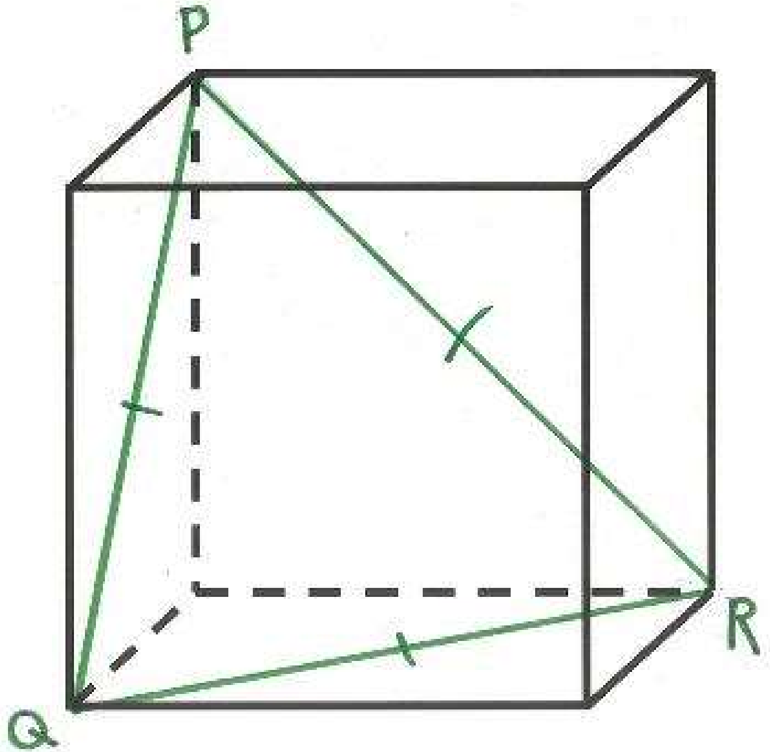


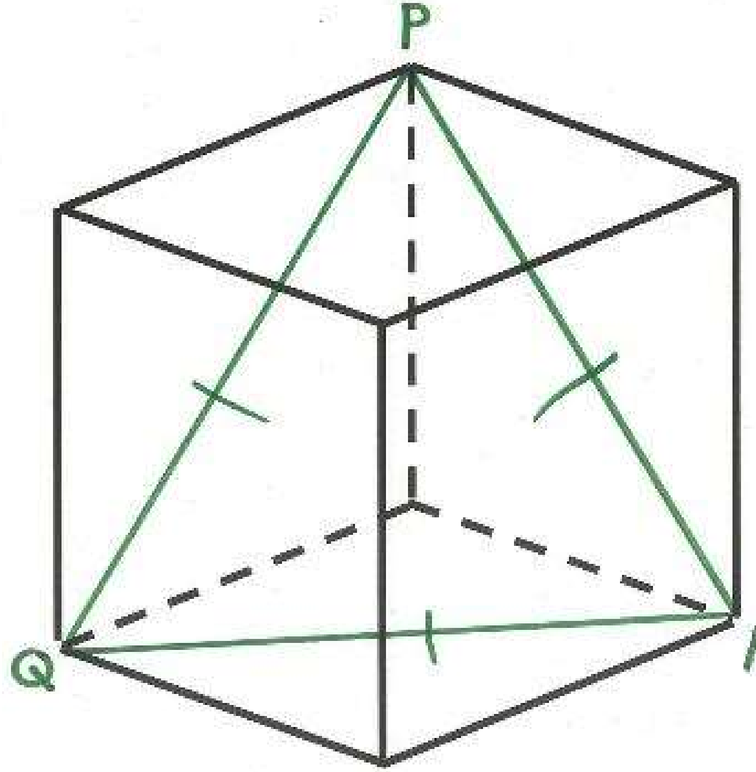
【気付いたことなど】

・1辺の長さは$6\sqrt{2}$

・面積は$6\sqrt{2} \times 3\sqrt{6} \times \frac{1}{2} = 18\sqrt{3}$

切り口：　正三角形　　　　担当：

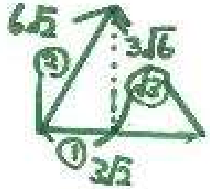




【気付いたことなど】

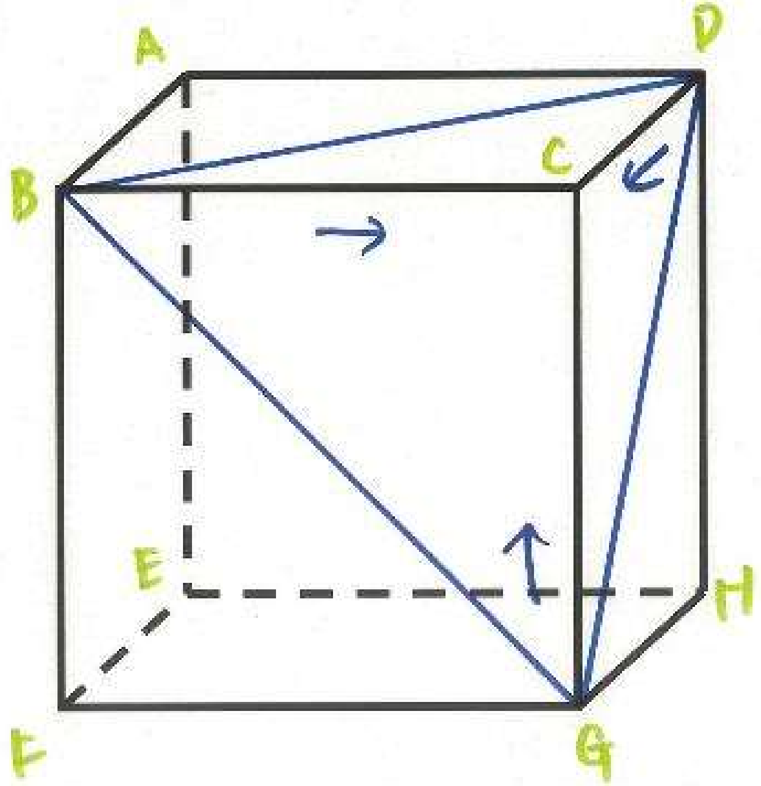
・直線PQ,PR,QRは1:1:$\sqrt{2}$より6$\sqrt{2}$
・3辺すべての直線の長さが等しくなるため、正三角形になる。

・PQ=PR=QR=6$\sqrt{}$
・面積は18$\sqrt{3}$ ($6\sqrt{2}\times3\sqrt{6}\times\frac{1}{2}$)



切り口： 正三角形

担当：

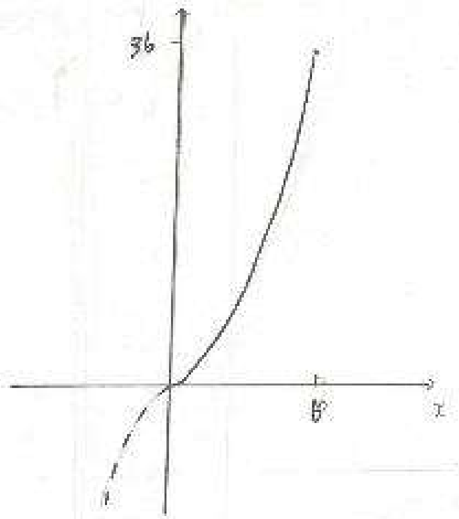


【気付いたことなど】

・1辺の長さ → $6\sqrt{2}$

・点B、D、Gでなければいけないというわけではなく
隣り合ってる3面を選んで対角線をもう一つの対角線と合わせれば

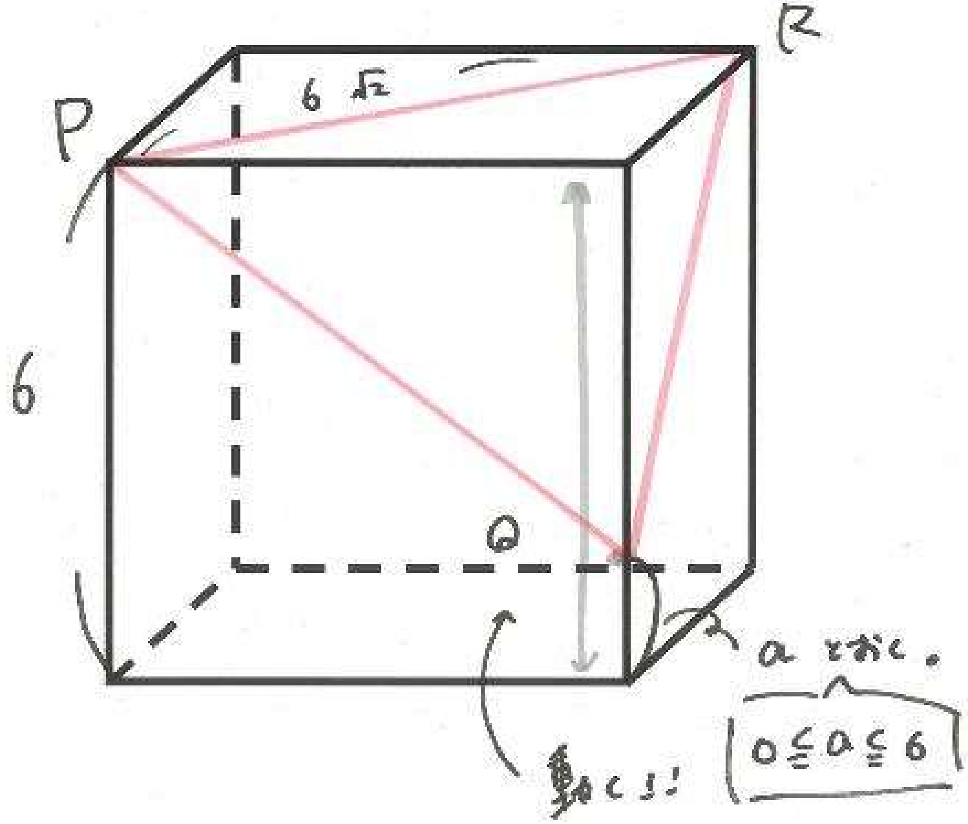
PQRを左図のように同じ分だけ動かしてみると△PQRの体積の変化の?



$y = \frac{1}{6}x^3$

切り口： 二等辺三角形

(→正三角形)



担当：

【気付いたことなど】 面積：S

∵ $a=0$ の時。

$S=6\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=18\sqrt{3}$

↳正三角形

∵ $0<a<6$ の時。

$S=6\sqrt{2}\times\sqrt{((6-a)^2+6^2)-(3\sqrt{2})^2}\times\frac{1}{2}$

↳二等辺三角形

√ の中

$36-12a+a^2+36-18$

$a^2-12a+54$

↳2次方程式

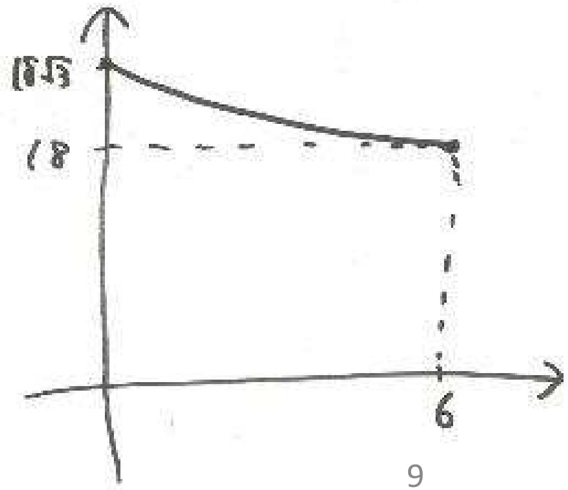
…放物線

∵ $a=6$ のとき。

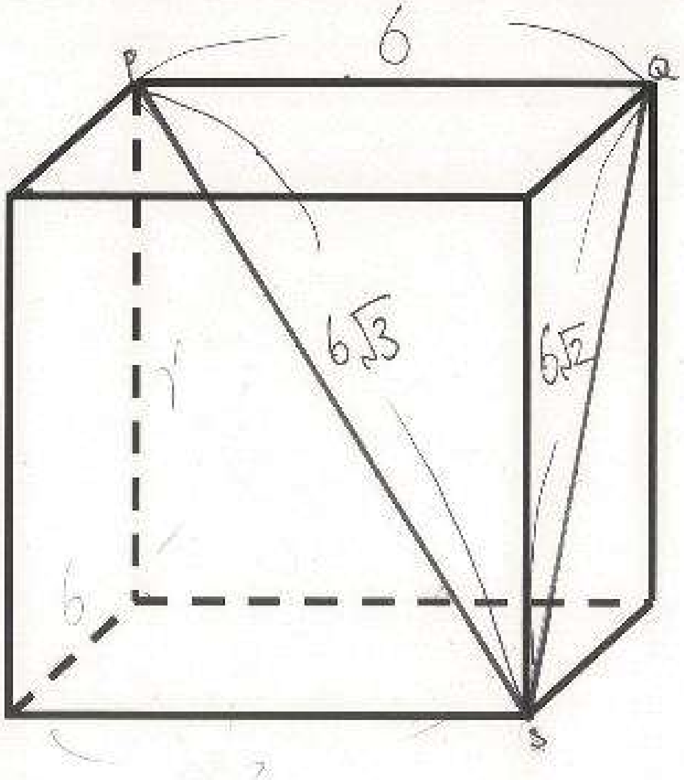
$S=6\times 6\times\frac{1}{2}$ → 二等辺三角形

$=18$

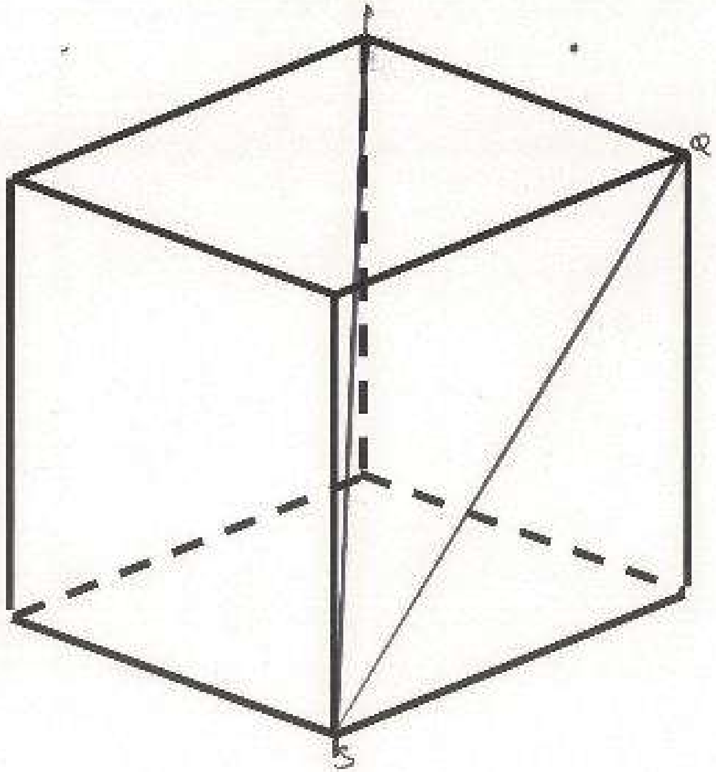
GeoGebraより。



切り口：∠PQS=90°の直角三角形



担当：



【気付いたことなど】

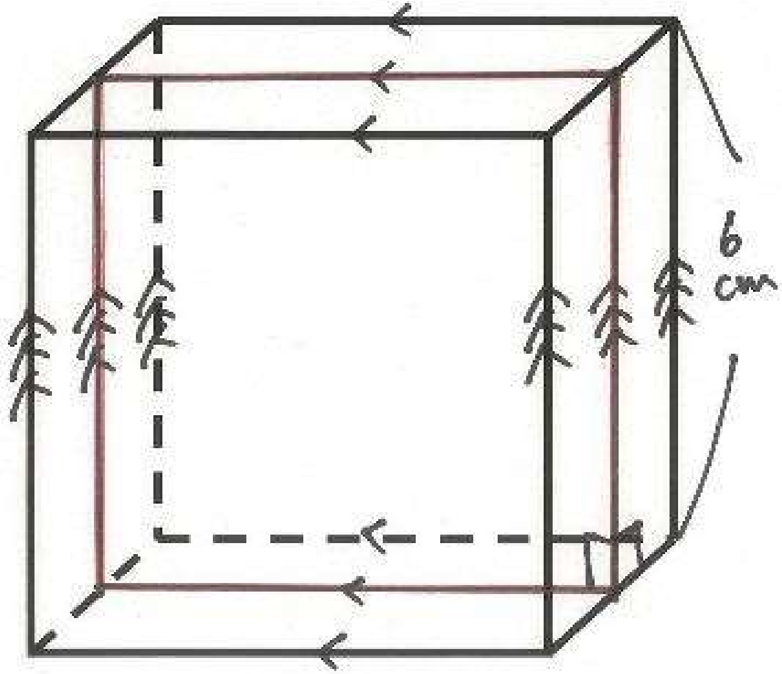
PQ=6
QS=$6\sqrt{2}$
PS=$6\sqrt{3}$

面積：$18\sqrt{2}$ cm²
周の長さ：$(6+6\sqrt{2}+6\sqrt{3})$

ホント？

切り口： 正方形

担当：



【気付いたことなど】

周長：24cm

面積：36cm²

、各辺が立方体の一辺と平行

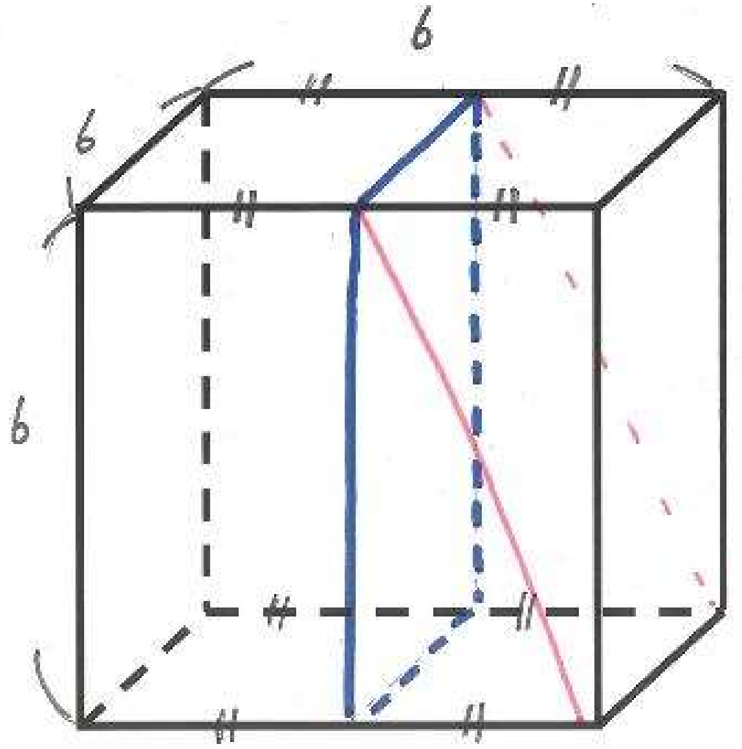
、四面を通る かつ 他二面と平行

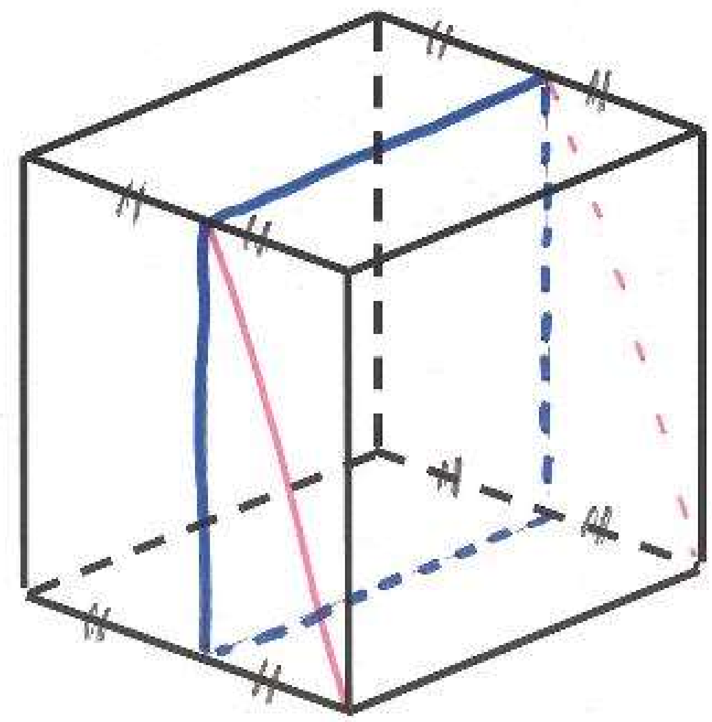
、各辺が二面に垂直である

、これ1つのみ 描き方は

、立方体の面と合同である

切り口：　正方形　　　　　　　　　　担当：





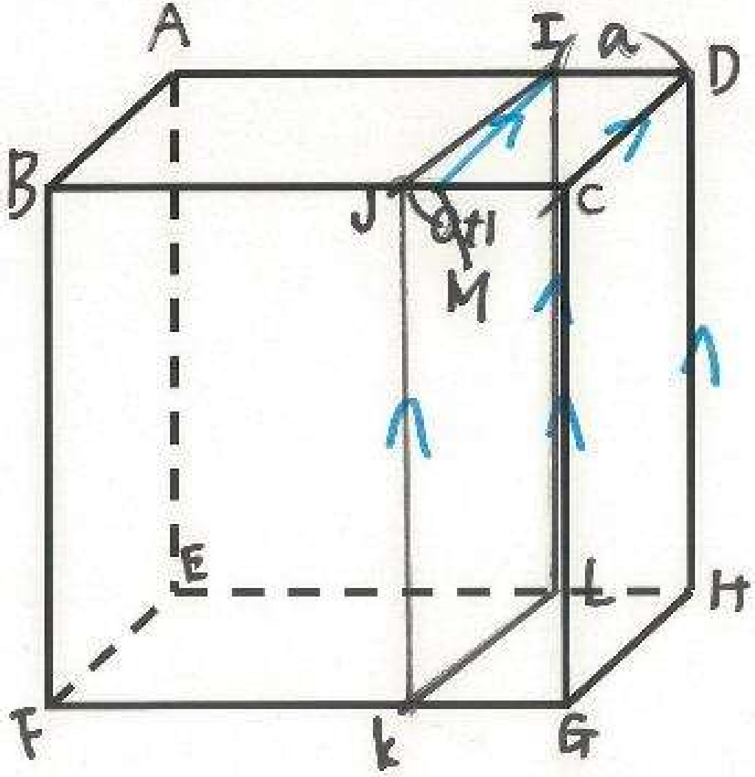
【気付いたことなど】

- 1つ分の体積 … 6×3×6 = 108　$\underline{108cm^3}$
  2つ分の体積 … 6×6×6 = 216　$\underline{216cm^3}$
  ちょうど半分になる。
- 切り口の周りの長さ … 6×4 = 24　$\underline{24cm}$

- 真ん中ではなくピンクの線の切り口で切ると、切り口は正方形ではなく、長方形になる。
- 正方形とは、四つの内角が全て直角で四辺の長さが等しい四角形の事である。
  辺の中点をそれぞれ通るように切った切り口は、四辺の長さが等しく、四つの内角が全て直角なので、正方形だと言える。

切り口：長方形

担当：



【気付いたことなど】

辺DCに平行な線IMをひくと. DC//IM

$\angle DCM = \angle IMJ = 90^\circ$

直角三角形IJMにおいて三平方の定理よ

$(a+1-a)^2 + 6^2 = IJ^2$

$1^2 + 36 = IJ^2$

$\sqrt{37} = IJ$ 同様に辺KLも$\sqrt{37}$ (IJ//KL

辺JK, ILは辺CG, DHと平行であるため

$JK = IL = CG = DH = 6$。

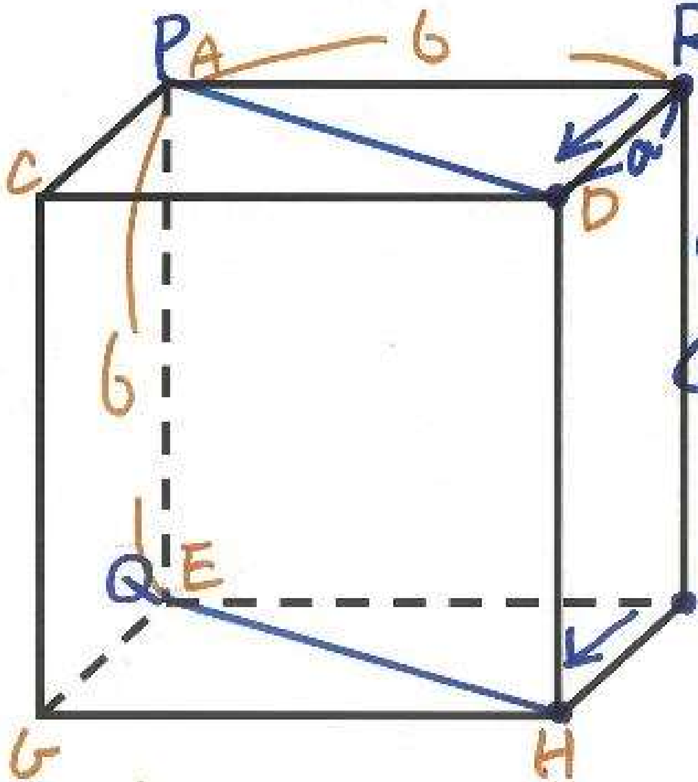
辺CGは面ABCDに垂直に交わるため辺CG

平行な辺JKも同様に面ABCDと垂直に交わ

るから$\angle IJK = 90^\circ$ (他の角も同様)

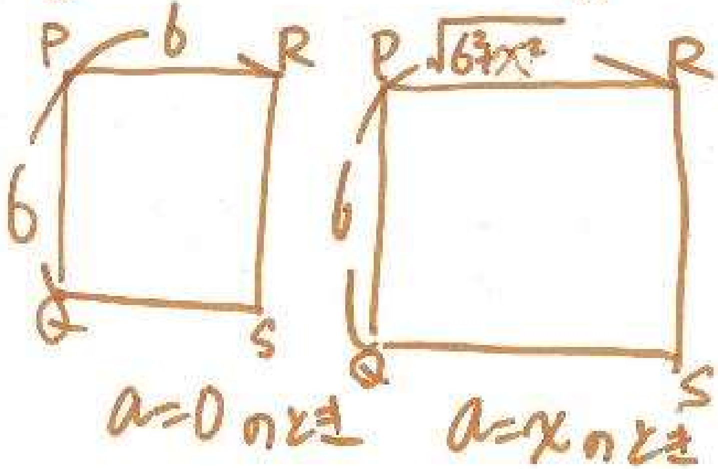
よって四角形IJKLは長方形である。

切り口： 長方形　　　　　　　　　　担当：



点Rは B→Dに a動く。 $(0 \leqq a \leqq 6)$

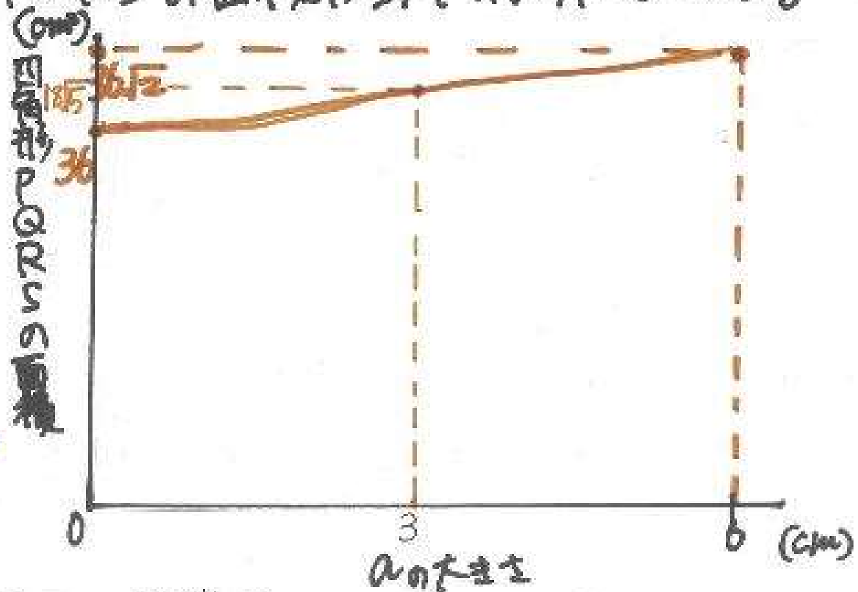
HF⊥RS である。



【気付いたことなど】

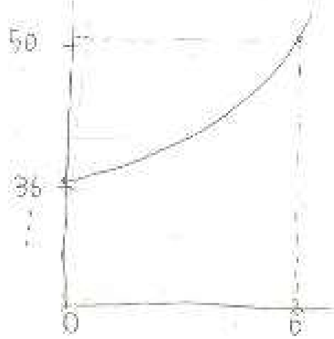
左の図のように動かしたとき、

四角形PQRSの面積は以下のように表せる。



四角形PQRSの面積は

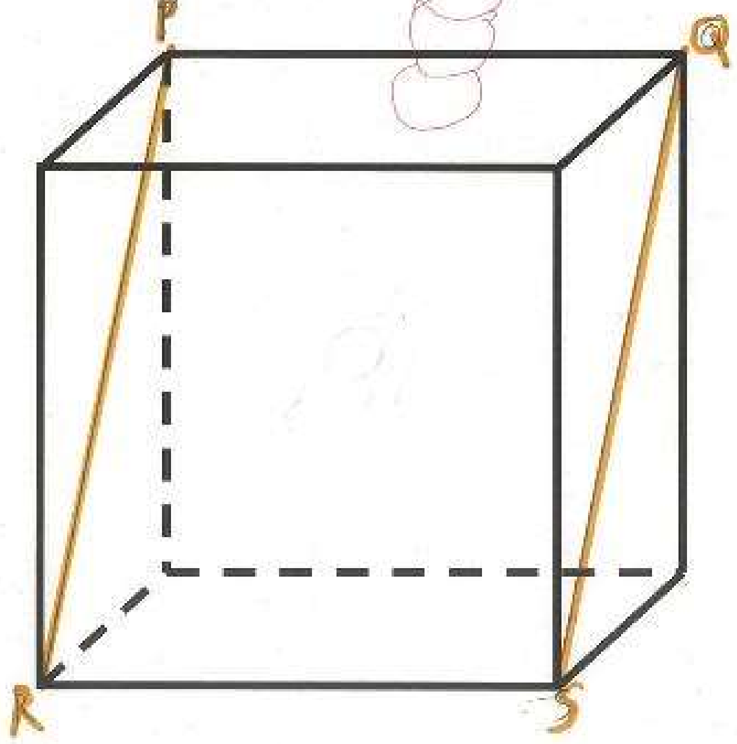
$6\sqrt{6^2+a^2}$ cm² といえる。

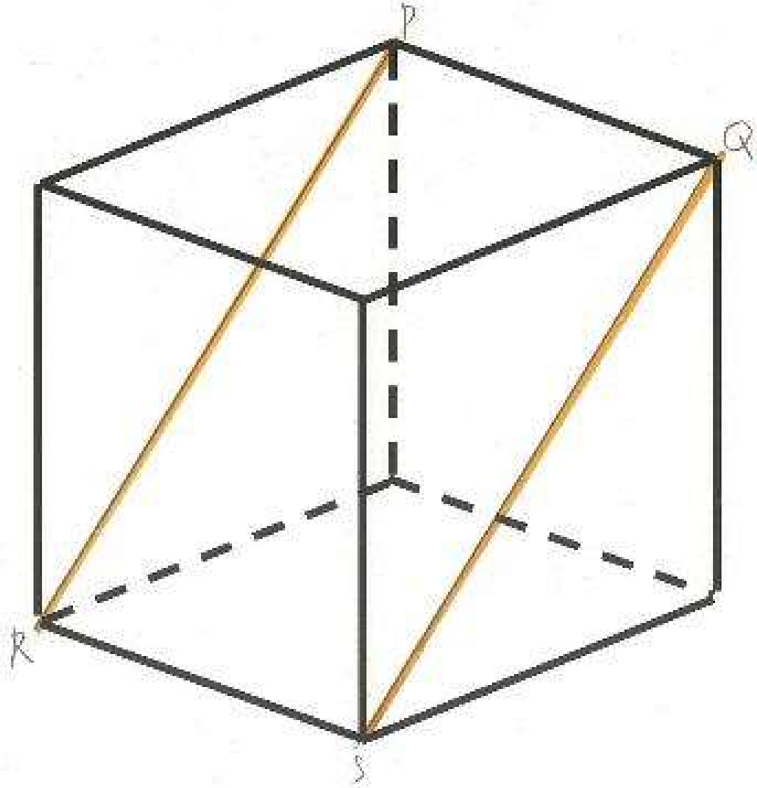


← GeoGebraより

切り口：長方形

担当：





【気付いたことなど】

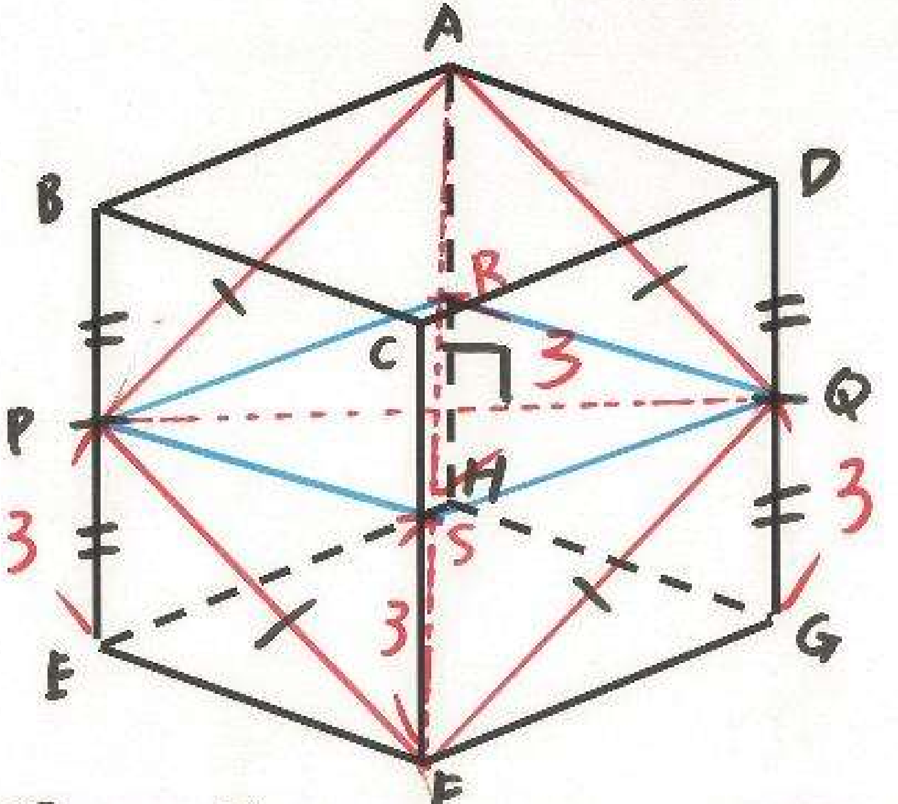
辺PR 辺QSは 長さが$6\sqrt{2}$（対角線）

辺PQ 辺RSは6cm

面PQRSの面積は $6\sqrt{2}\times6=36\sqrt{2}$ cm²

切り口： ひし形　　　担当：

BP＝EP, DQ＝GQ
とする。



【気付いたことなど】

AP＝AQ＝FP＝FQ

正方形とはいえない

(理由)正方形ABCDの点B,C,Dが下が
った点がP, Q, Fと考えると、∠PAQが
鋭角になるから。

点Hを含む体積

四角形EFGHを底面積とすると
高さは点AとFがPとQと同じ
高さであるRとSに移動すると
考えると、6×6×3＝108

108 cm³

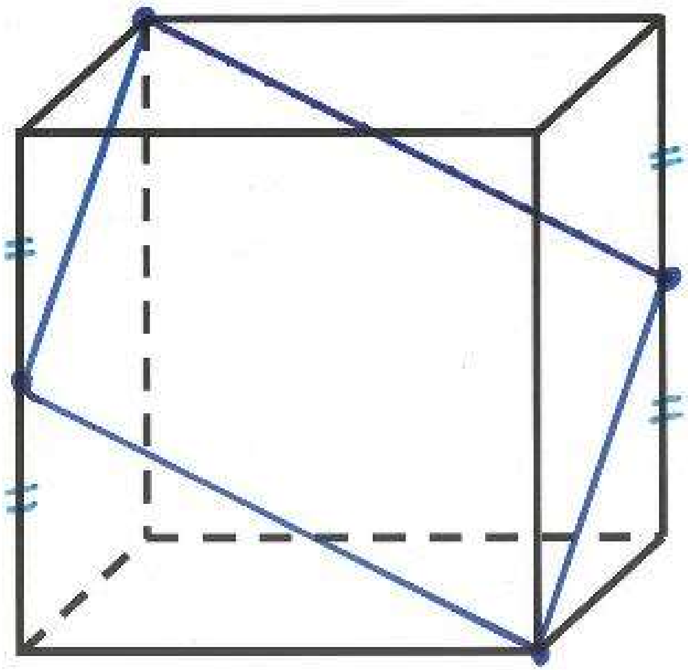
周りの長さ AP×4＝$3\sqrt{5}\times4=\underline{12\sqrt{5}}$ cm

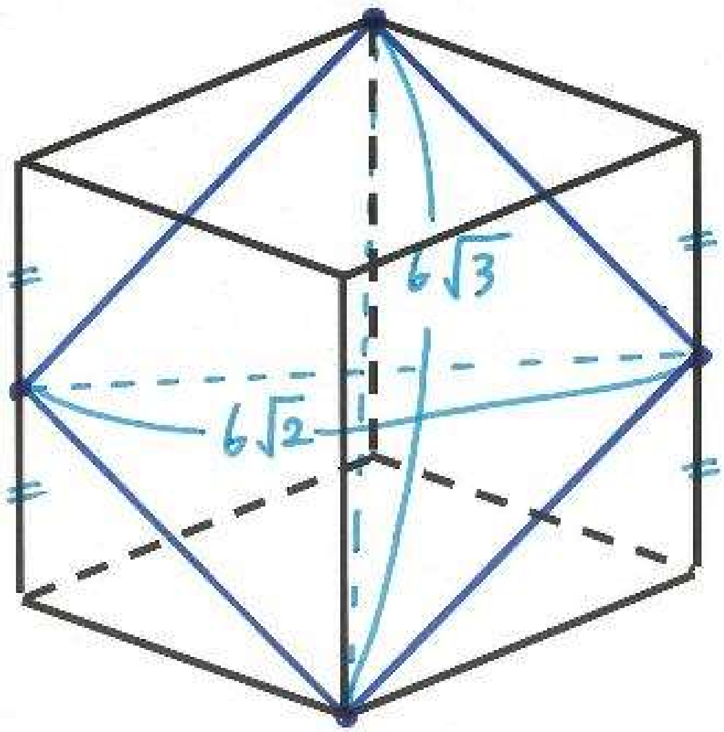
面積＝AF×PQ×$\frac{1}{2}$＝$6\sqrt{3}\times\cancel{6}^{3}\sqrt{2}\times\frac{1}{\cancel{2}}$
＝$\underline{18\sqrt{6}}$ cm²

AR＝HR
CS＝FS

切り口： ひし形

担当：





【気付いたことなど】

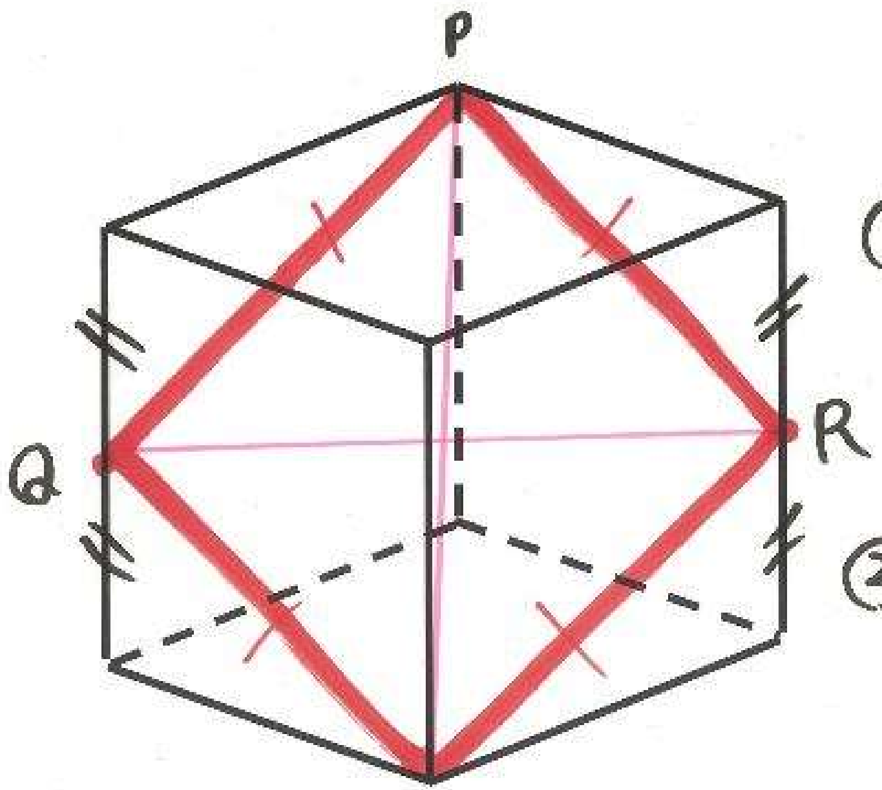
・1辺は $3\sqrt{5}$ cm → 周りの長さ $12\sqrt{5}$ cm

・面積は $18\sqrt{6}$ cm² $\left(6\sqrt{2} \times 6\sqrt{3} \times \frac{1}{2}\right)$

切り口：ひし形

担当：

【気付いたことなど】



切り口が正方形ではなくひし形である理由

① 対角線の長さが等しくない。

② 三平方の定理の逆が成り立たない。

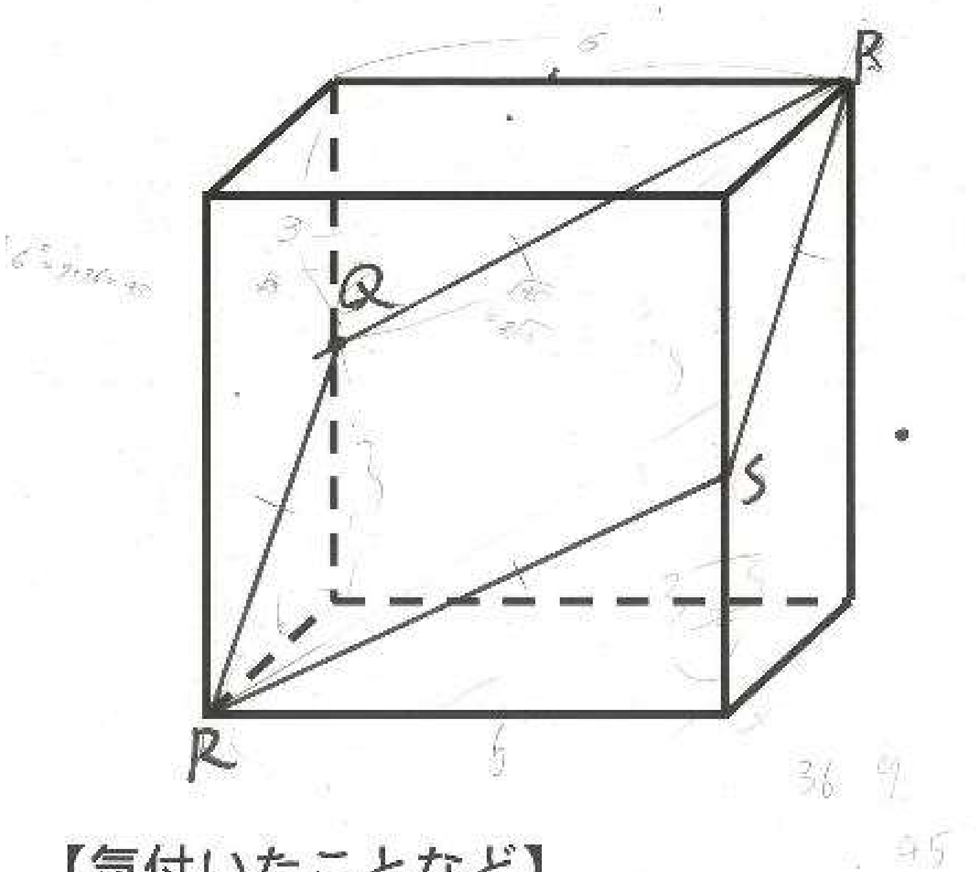
一辺を6としたとき、$PQ^2=3^2+6^2$　$PQ=3\sqrt{5}$

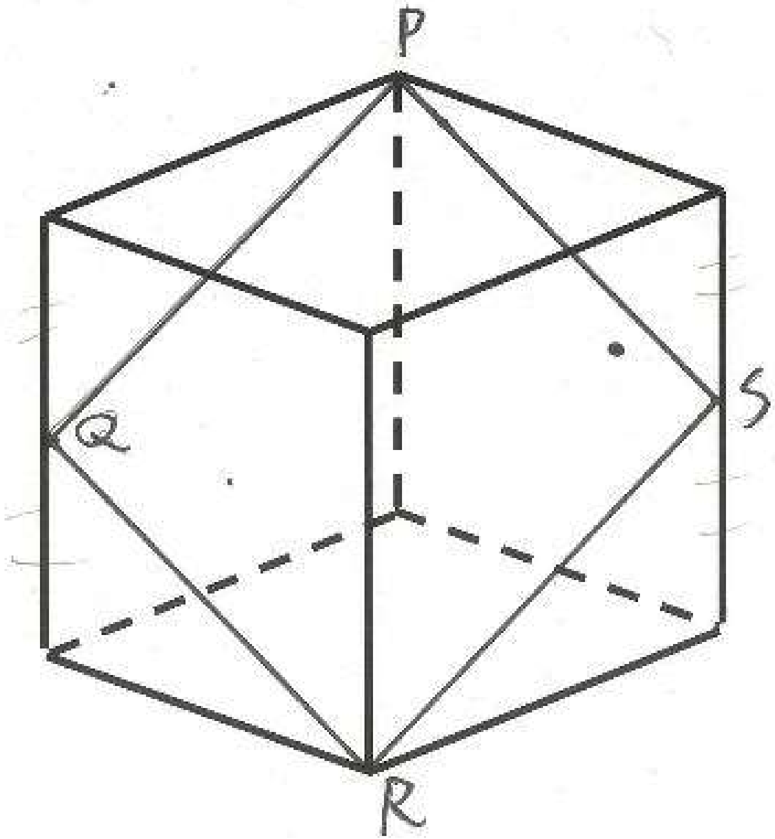
$QR=6\times\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

$PQ^2+PR^2=45+45=90\neq QR^2=72$

形：　ひし形

担当：



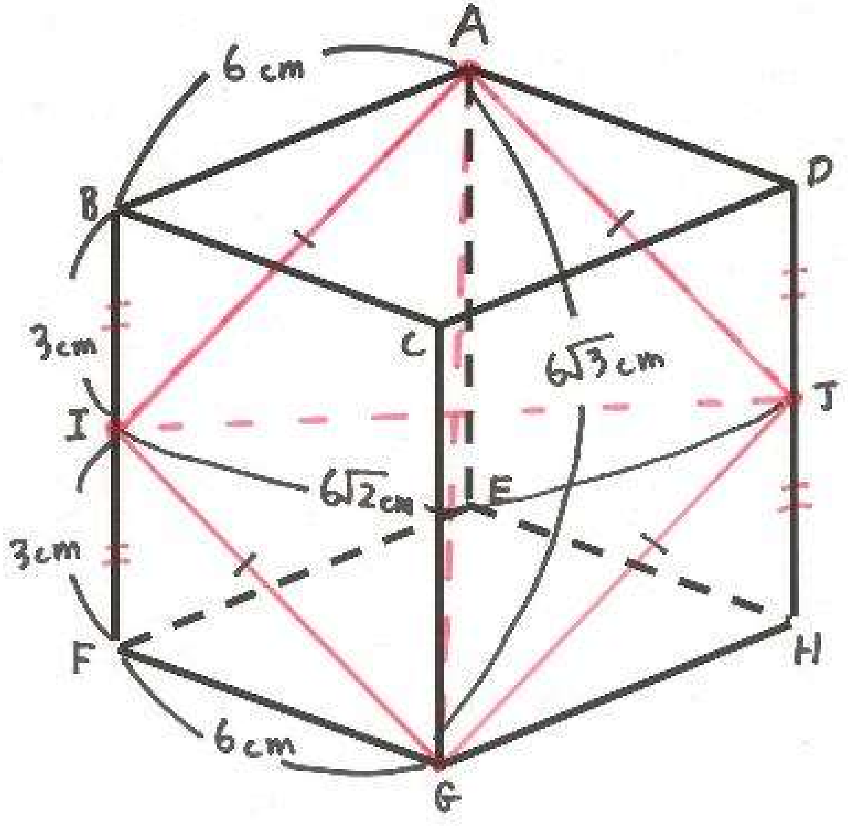


【気付いたことなど】

$PQ=QR=RS=SP=3\sqrt{5}$

切り口：ひし形

担当：



【気付いたことなど】

周の長さ

$3\sqrt{5}\text{cm} \times 4$つ $= 12\sqrt{5}\text{cm}$

面積

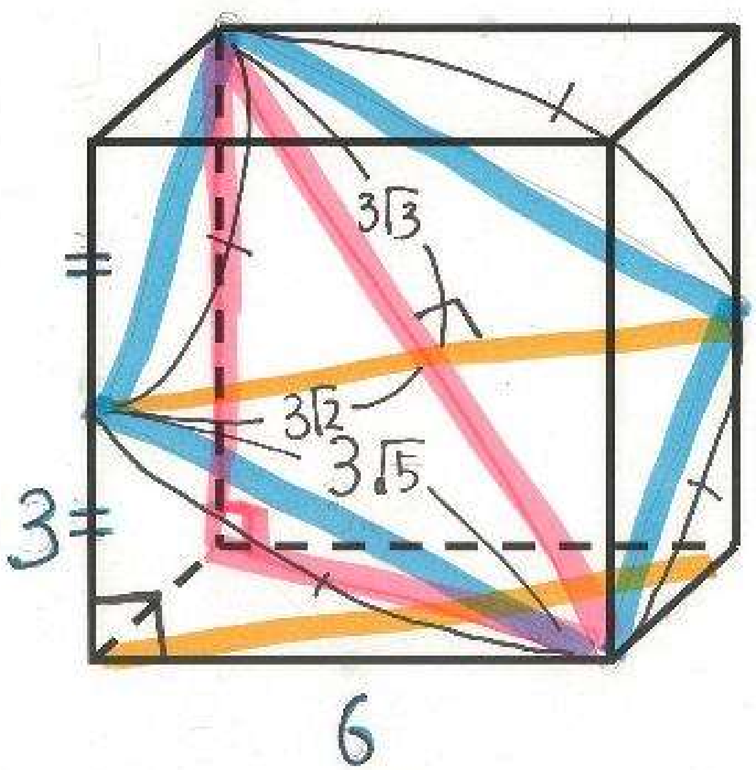
$6\sqrt{2}\text{cm} \times 6\sqrt{3}\text{cm} = 36\sqrt{6}\text{cm}^2$

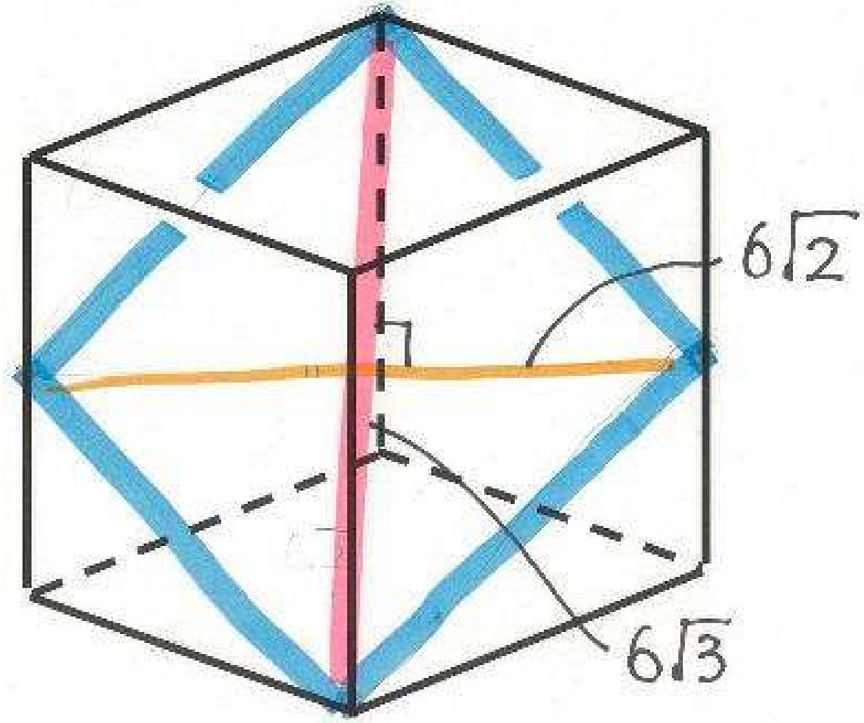
ABCD-EFGHを4点AIGJを通るように切断したときの点Eを含む図形の体積

$6\text{cm} \times 6\text{cm} \times \frac{0\text{cm}+3\text{cm}+3\text{cm}+6\text{cm}}{4} = 108\text{cm}$

切り口： ひし形

担当：





【気付いたことなど】

周りの長さ

$\ell = 3\sqrt{5} \times 4$

$= 12\sqrt{5}$ cm

ひし形の面積

$S = 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{3} \times \frac{1}{2} \times 4$

$= 18\sqrt{6}$

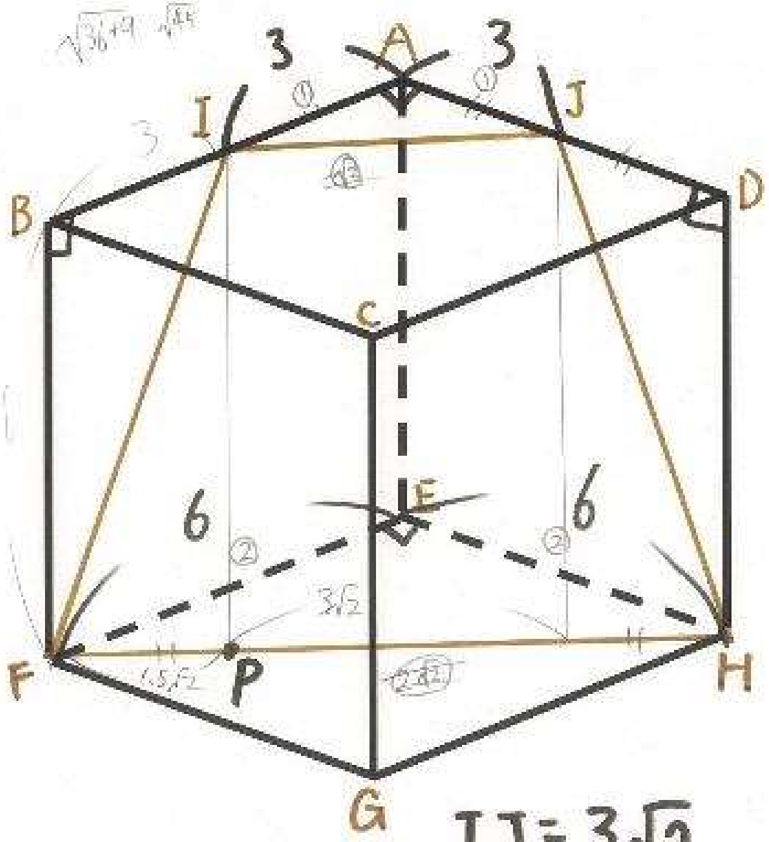
$18\sqrt{6}$ cm²

ひし形になるワケ

☆対角線の長さが違うから！

切り口：台形（等脚台形）

担当：



$IJ = 3\sqrt{2}$

$FH = 6\sqrt{2}$

$18 - \frac{18}{4} = \frac{72-18}{4}$

$= \sqrt{\frac{54}{4}}$

$IP = \frac{3\sqrt{6}}{2}$

【気付いたことなど】

・$IF = JH = 3\sqrt{5}$　・$IJ \parallel FH$

・$IJ : FH = 1 : 2$

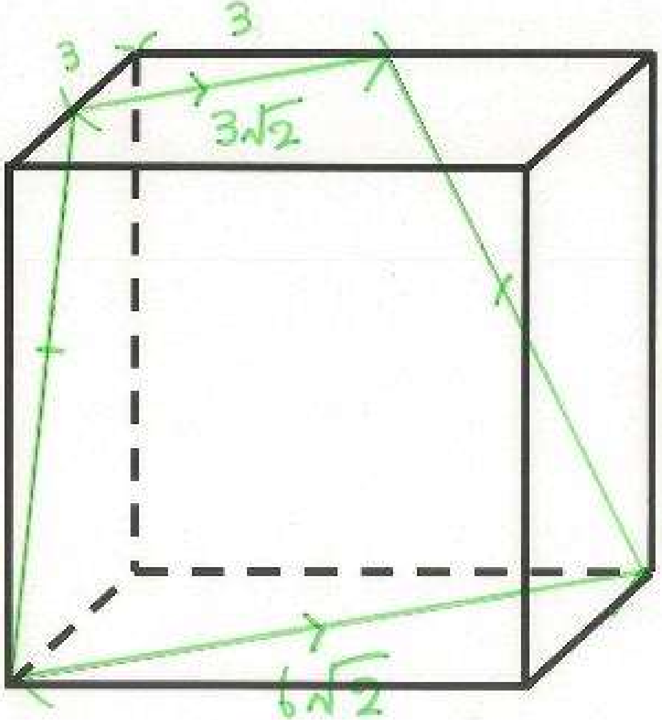
〈面積〉

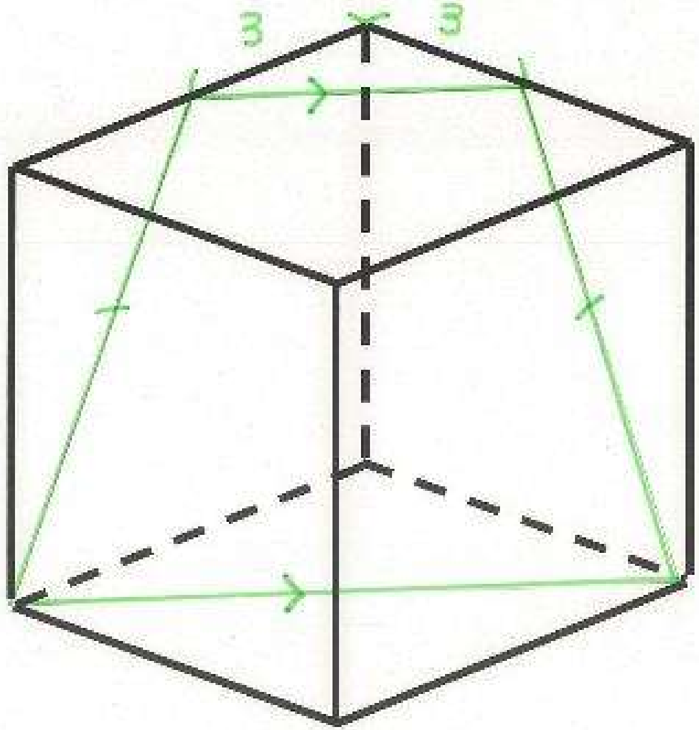
$(3\sqrt{2} + 6\sqrt{2}) \times \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{6}}{2}$

$= 9\sqrt{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{6}}{2}$

$= \frac{27\sqrt{3}}{2}$

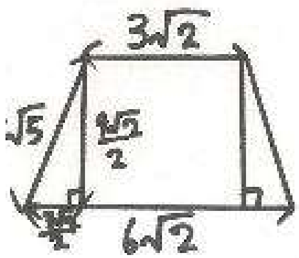
切り口：等脚台形　　　　　　　　　　　　担当：





上底と下底が平行ならば
断面は台形になる。

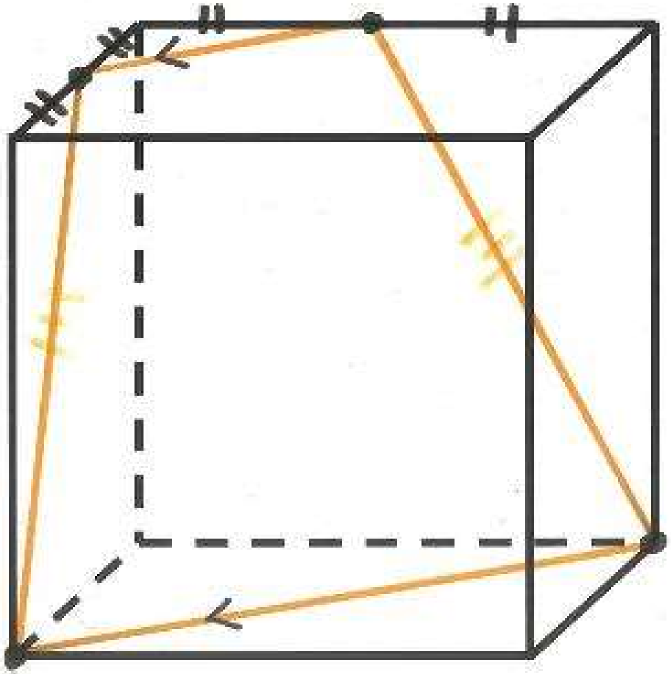
【気付いたことなど】

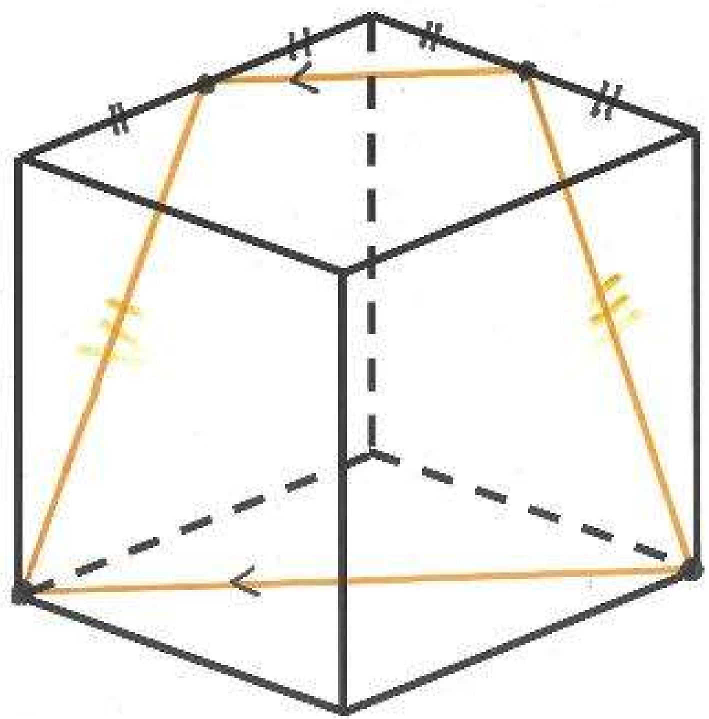


周長… $9\sqrt{2}+6\sqrt{5}$

面積… $\dfrac{81}{2}$

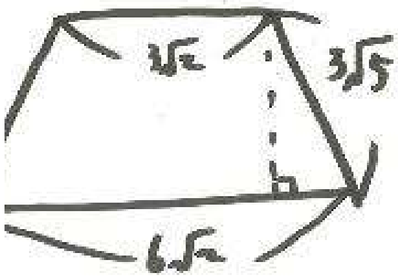
切り口：等脚台形　　　　　　　　　　担当：





【気付いたことなど】

周りの長さ：$3\sqrt{2}+6\sqrt{2}+3\sqrt{5}\times 2=\underline{9\sqrt{2}+6\sqrt{5}\ \text{cm}}$ //



面積：$(3\sqrt{5})^2-\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2$

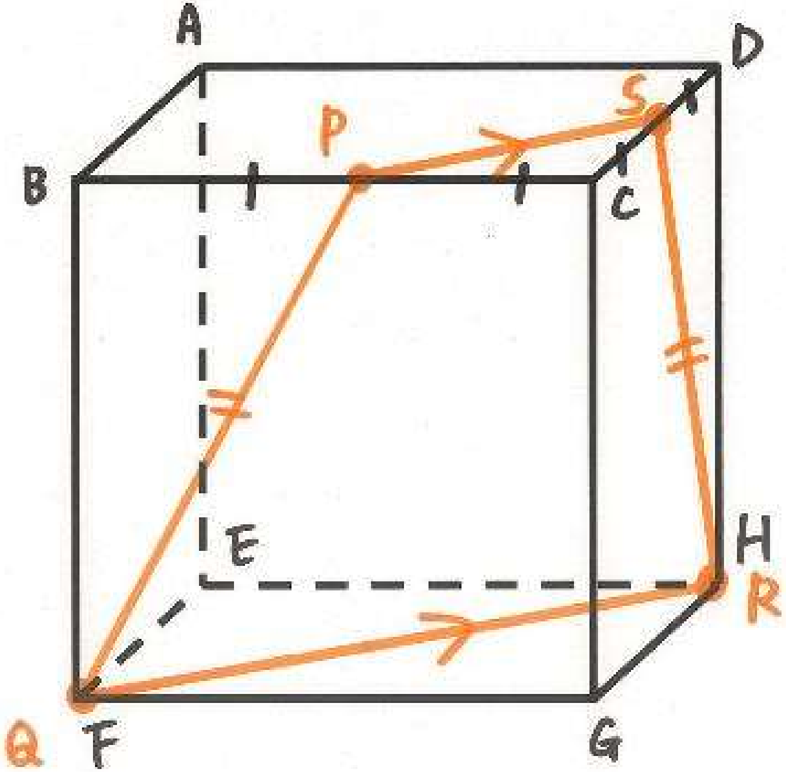
$=\frac{81}{2}$　$\sqrt{\frac{81}{2}}=\frac{9\sqrt{2}}{2}$

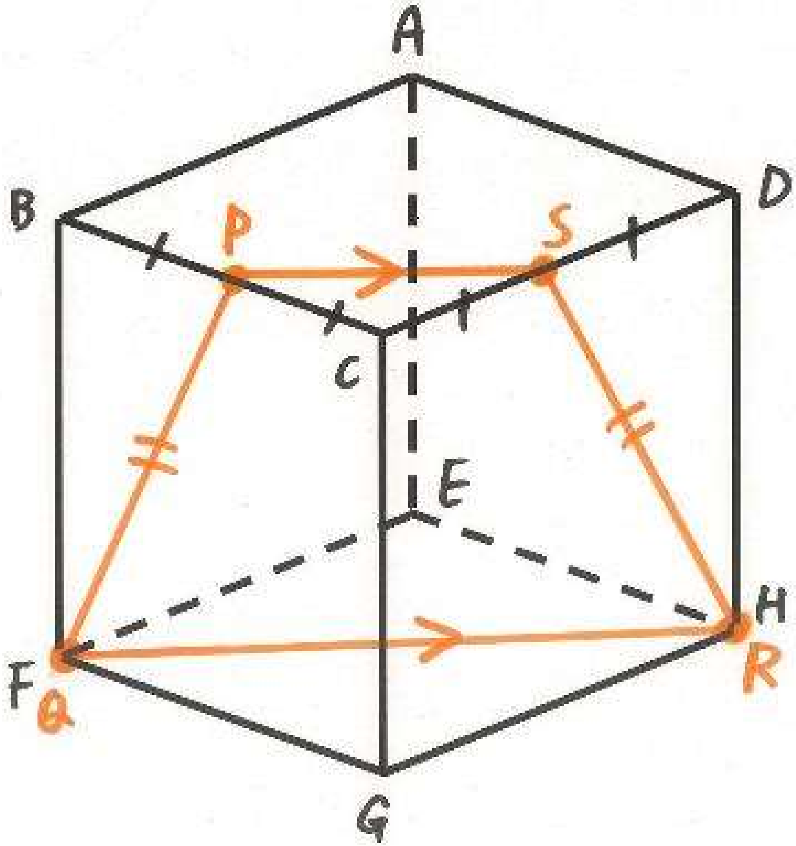
$(3\sqrt{2}+6\sqrt{2})\times\frac{9\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}$

$=9\sqrt{2}\times\frac{9\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}$

$=\frac{162}{4}=\underline{\frac{81}{2}\ \text{cm}^2}$ //

切り口：　等脚台形　　　　担当：





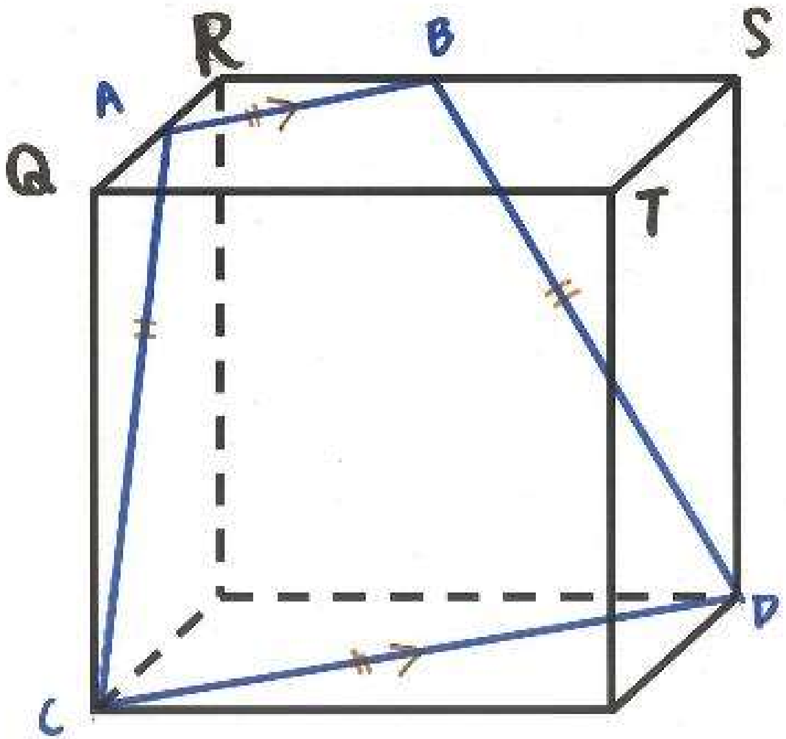
【気付いたことなど】

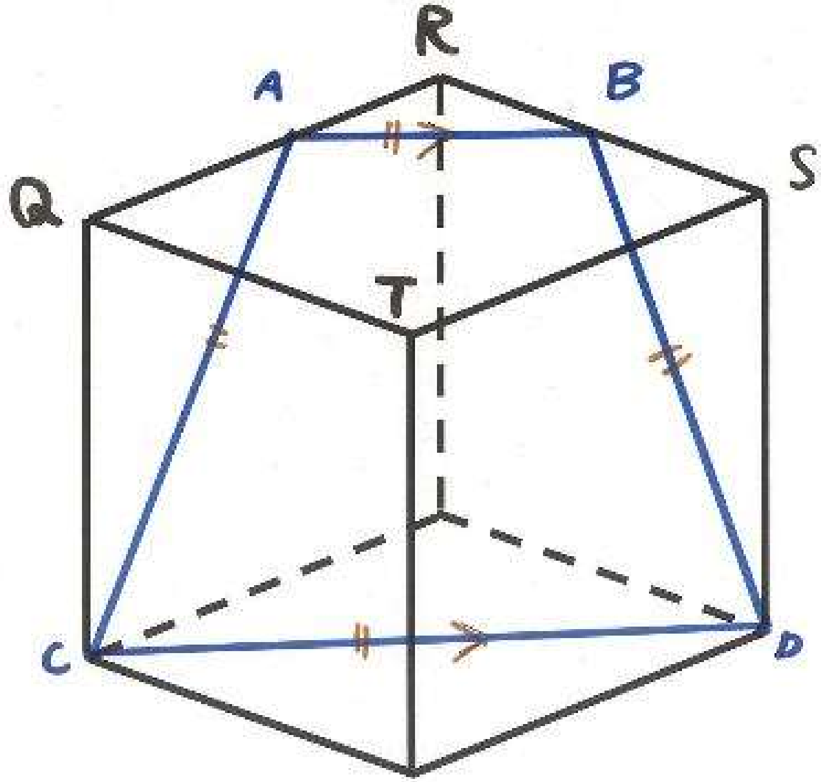
PSは平行移動させれば中点でなくても等脚台形になると言える。

↳ 等脚台形は PS//QR, PQ=SR になれば良い

例）点PがABの中点上にあるとき、点SはADの中点上にある

切り口：等脚台形　　　　担当：





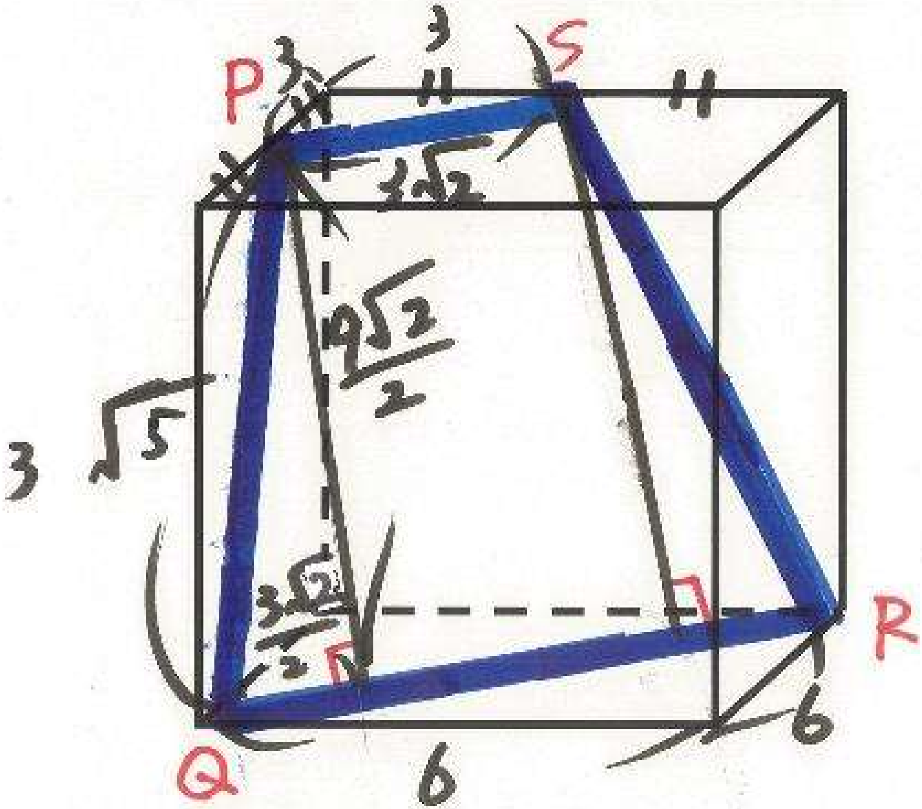
【気付いたことなど】

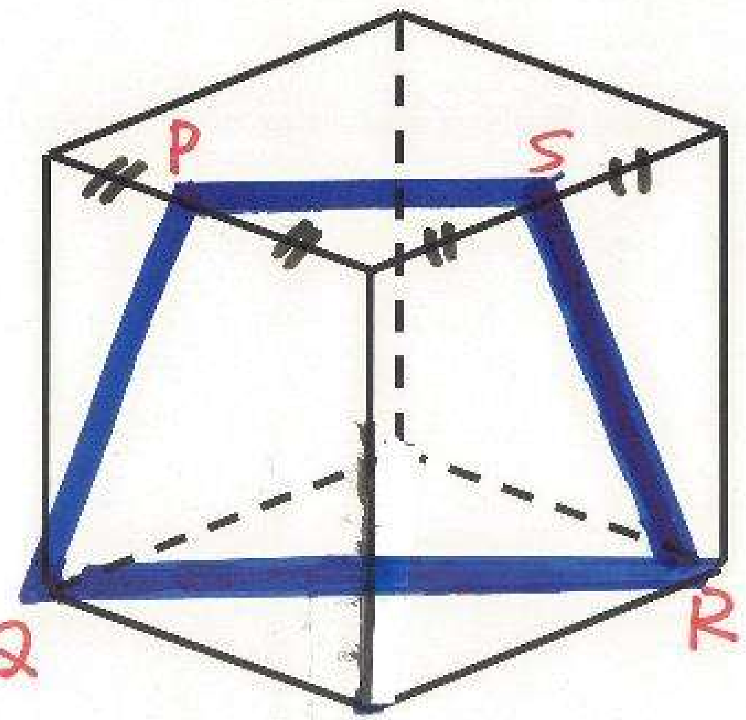
・AB//CD

・AはQRの中点，BはRSの中点

等脚台形になれる

切り口： 等脚台形　　　　　　　　担当：





【気付いたことなど】

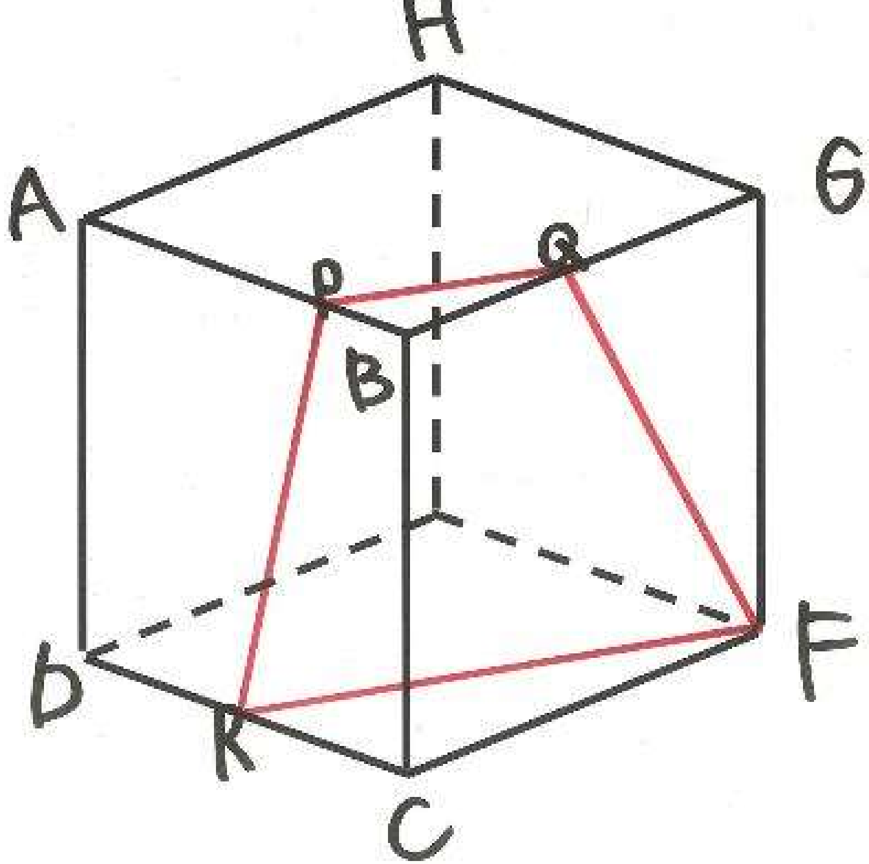
・$QR = 6\sqrt{2}$　$PS = 3\sqrt{2}$　$PQ = 3\sqrt{5}$

高さ $= 6\sqrt{2} - 3\sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$　PQと三平方で… $\frac{9\sqrt{2}}{2}$

切り口の面積：$\frac{81}{2}$

切り口： ただの台形　　担当：

【気付いたことなど】



BR：BQ＝RC：CF …①

∠ABG＝∠DCF＝90° …②

①②より、2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので、

△BPQ∽△CRF …③

③よりPQ//RFなので四角形PQRFは台形といえる。

BP：BQ＝RC：CF＝1：1のとき、等脚台形。

BP＝RC（BQ＝CF）だと長方形になる。

等脚でない

切り口： 台形

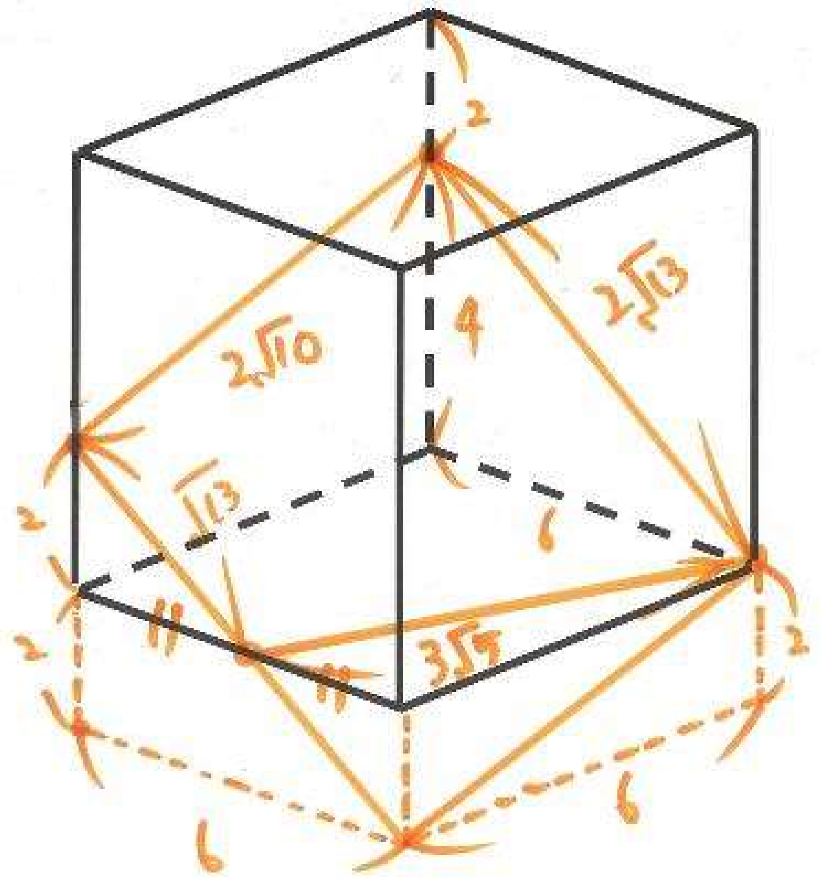
担当：

【気付いたことなど】

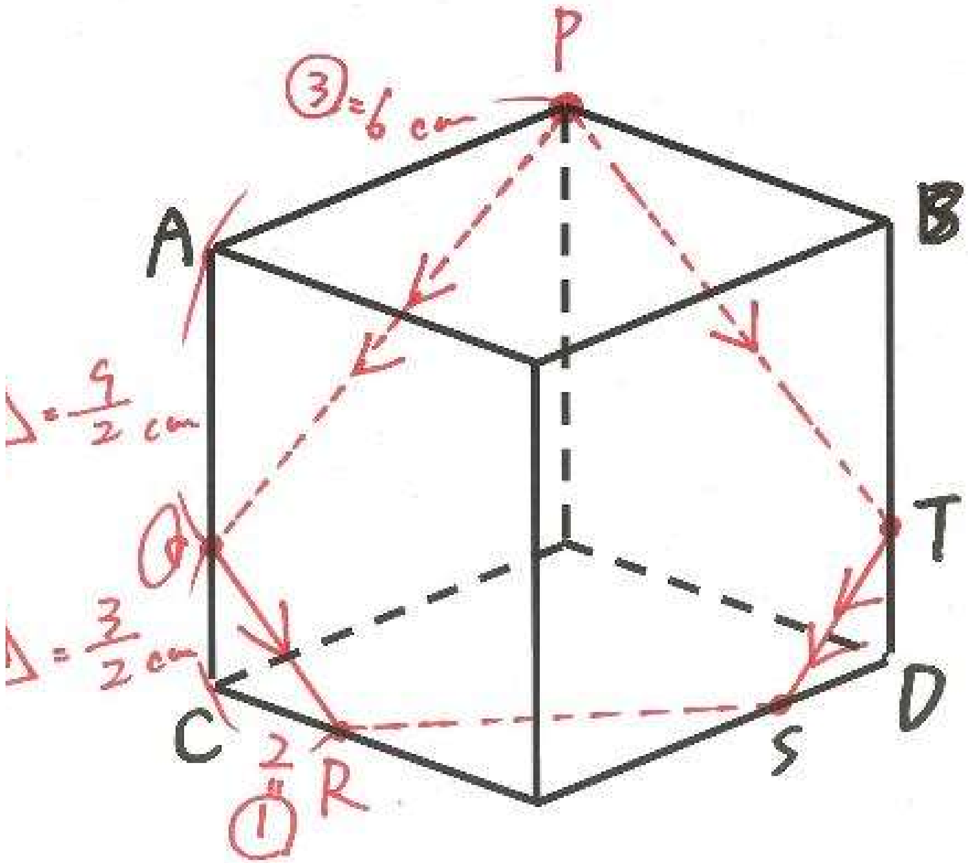
〈周の長さ〉

$$\sqrt{13}+2\sqrt{13}+2\sqrt{10}+3\sqrt{5}$$

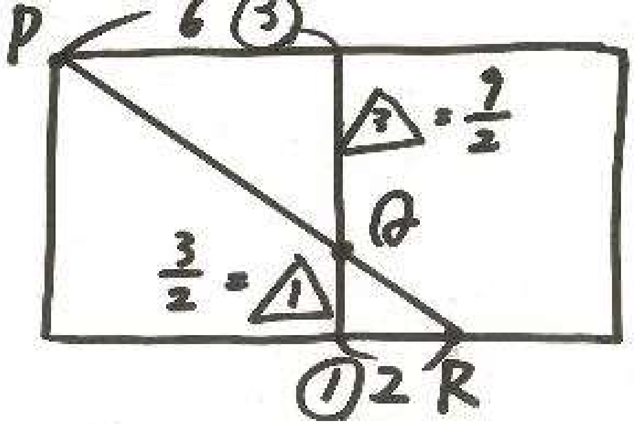
$$=3\sqrt{15}+2\sqrt{10}+3\sqrt{5}$$



切り口：　五角形　　　　担当：



【気付いたことなど】



$\triangle PAQ \backsim \triangle PBT$ より

$QR \parallel PT$

$\triangle QCR \backsim \triangle TDS$ より

$PQ \parallel TS$